流固耦合地震波动谱元模拟方法

李鸿晶　南京工业大学工程力学研究所　☆ 2022年12月29日　☆ 线上报告

Email：hjing@njtech.edu.cn　☆　Tel: 13851488284

科学报告会回顾

2010：生命线地震工程的若干研究进展及NJUT发展方向

2011：近场波动数值模拟高效计算技术

2012：平稳地震地面运动的功率谱模型

2013：足尺埋地管线原位模拟断层试验研究

2014：未参加

2015：混凝土曲线梁桥地震倒塌数值模拟分析

2016：近场波动数值模拟中的人工边界问题

2017：高精度方法及其在地震工程中的应用

2018：动力问题的时空DC法

2021：高精度近场波动数值模拟方法中的几个问题

2022：流固耦合地震波动谱元模拟方法

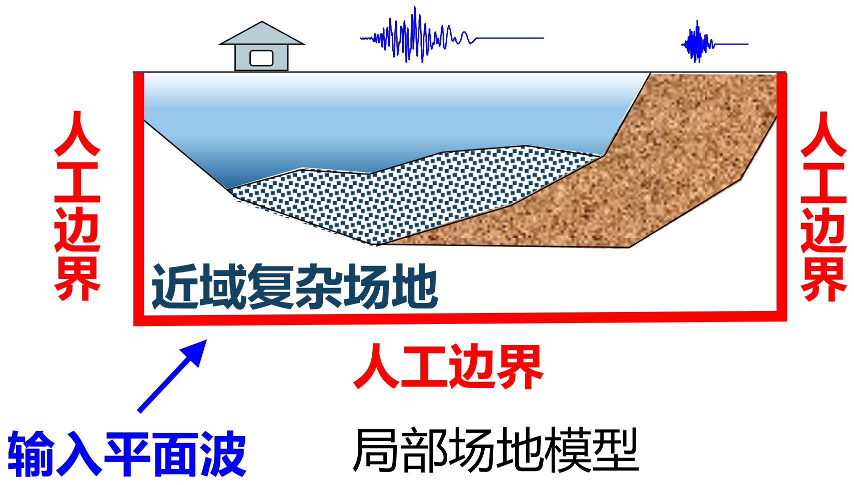
南京工业大学
NANJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

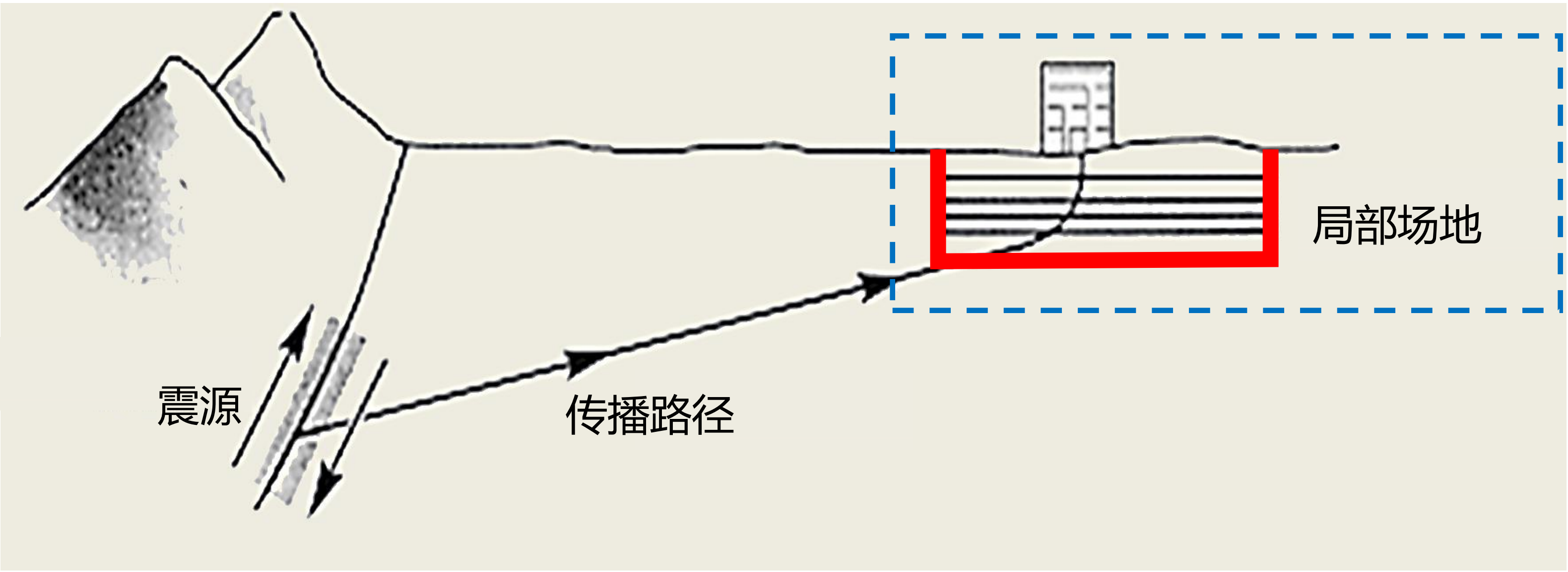
目录 | CONTENT

结构地震响应问题

两步分析法:

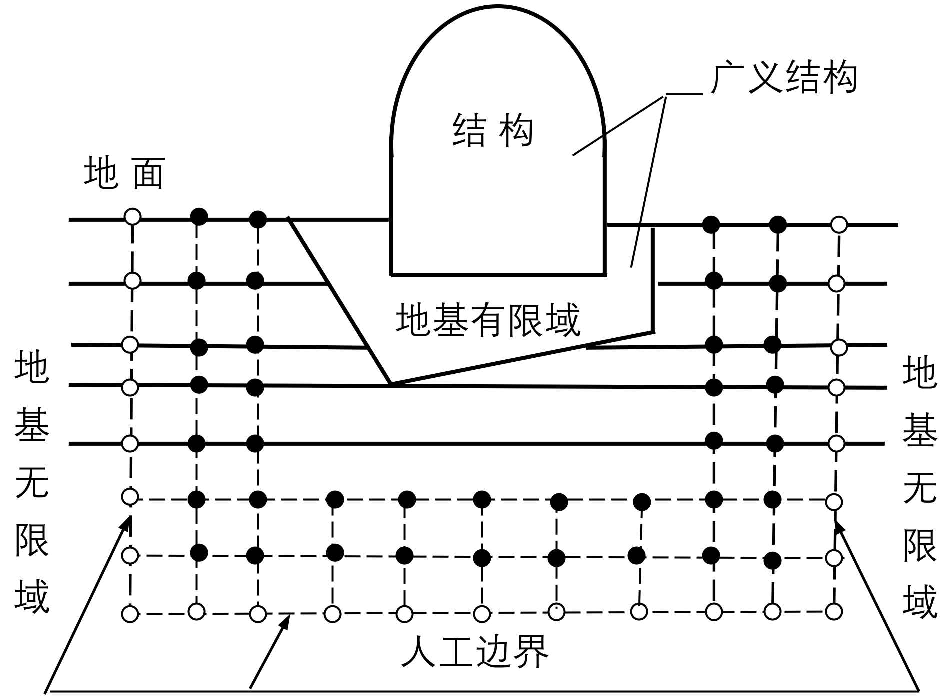
1. 预测场地地震动;
2. 开展结构地震响应分析。





近场波动数值模拟

- **波动本质**：结构-地基系统动态反应在本质上是振动的传播。
- **近场波动**：仅关心波源或散射源附近介质中的波动。
- **开放系统**：近场介质与外围介质之间存在能量交换。



- **数值模拟方法**：将连续问题转变为离散问题。

目标：在保证数值精度和稳定性的前提下，努力提高计算效率!

提高计算效率的途径

核心问题：计算效率

途径一

- 提升计算设备能力；
- 采用并行计算技术。。。

本质上默认现行方法计算工作量

（治标的途径）

途径二

- 应用高精度数值方法；
- 研发高效率数值算法。。。

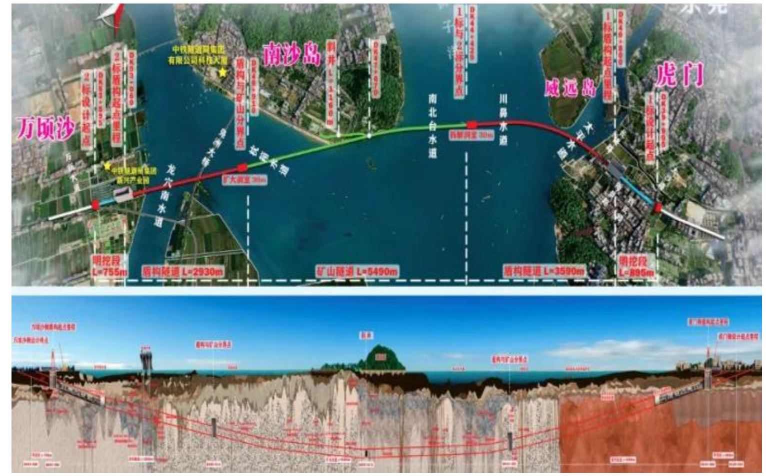
寻求能够减小计算工作量的新方法

（治本的途径）

工程背景

南京工业大学
工程力学研究所

- 跨江/海大桥

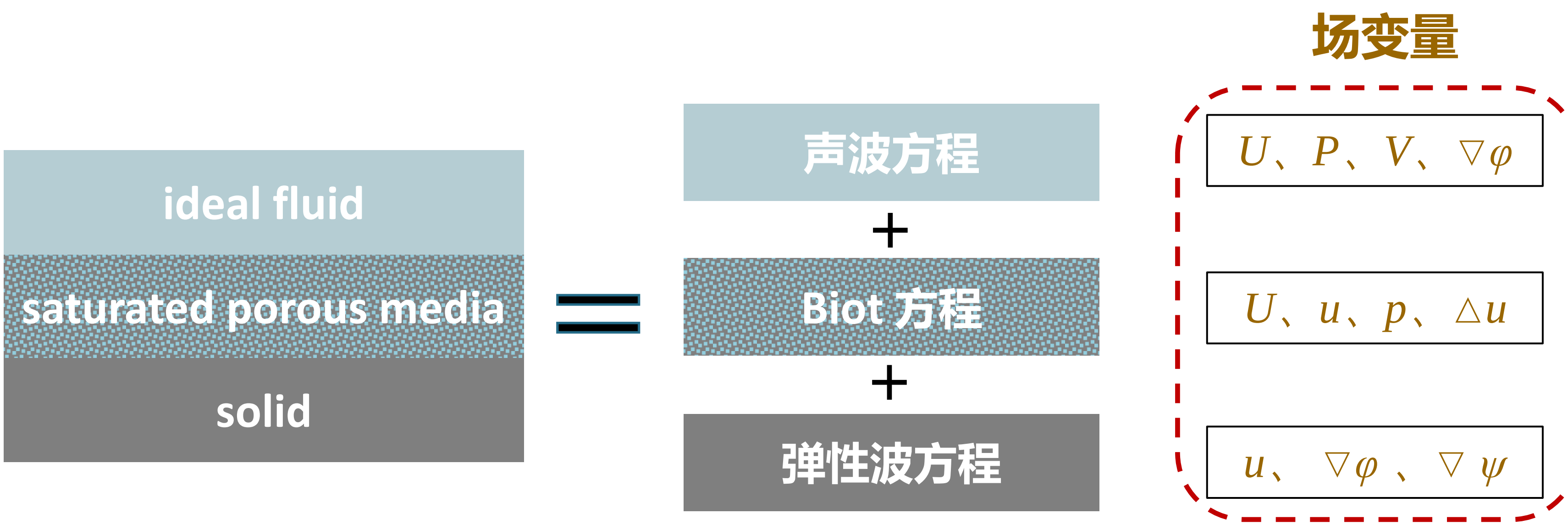


- 过江隧道

- 沿海建设

- 军/民用岛礁

复杂介质场地波动分析框架

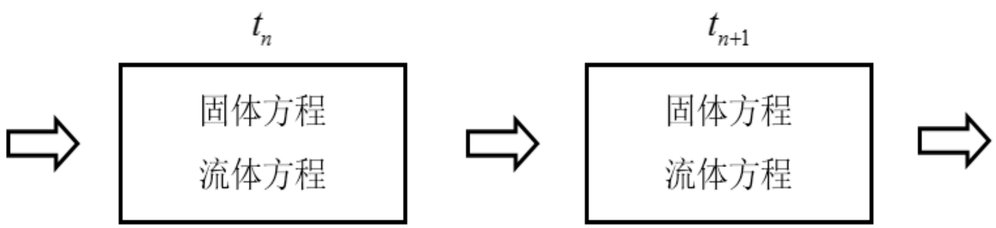


- 理论流体(声波方程)：$P_{,i} = \rho_w \ddot{U}_i$
- 饱和两相介质(Biot方程)：$\sigma_{ij,j} = (1-\beta)\rho_s \ddot{u}_i - R_i$

$$P_{,i} = \beta\rho_w \ddot{U}_i + R_i$$

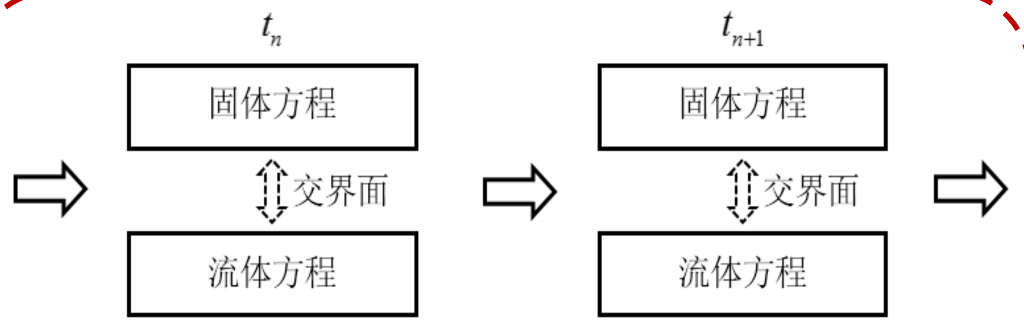
- 单相弹性土体(Navier方程)：$\sigma_{ij,j} = \rho_s \ddot{u}_i$

不同介质交界面结点计算



(a) 整体求解 (Monolithic approach)

- 接触条件准确性较高
- 通用性差，不利于开发维护



(b) 分块求解 (Partitioned approach)

- 通用性强，易于维护和拓展
- 可能需要迭代来交互信息

传统分析框架总结

- 场变量描述：
  - 速度-压力-位移-算子格式 (V - P - u - λ)
  - 位移-压力格式 (u - P)
  - 位移-速度势格式 (u - φ)
  - 位移-位移格式 (u - U)
- 分界面信息交互格式：
  - 整体求解模式、分块求解模式
- 空间离散方法：
  - 有限差分法、有限元法、谱元法及各类组合方法
- 时间积分方法：
  - 显式方法、隐式方法

南京工業大學
NANJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

目录 | CONTENT

流固耦合问题统一计算框架

ideal fluid	=	100%	+ 0	$\beta = 1$
saturated porous media		β	+ $1-\beta$	$0 < \beta < 1$
solid		0	+ 100%	$\beta = 0$

$$L_s^T \sigma' = 0 (u = 0)$$
$$-L_w^T P = \rho_w \ddot{U}$$

$\xleftarrow{\beta = 1}$

$$L_s^T \sigma' - (1-\beta) L_w^T P + b\left(\dot{U} - \dot{u}\right) = (1-\beta)\rho_s \ddot{u}$$
$$-\beta L_w^T P + b\left(\dot{u} - \dot{U}\right) = \beta \rho_w \ddot{U}$$

$\xrightarrow{\beta = 0}$

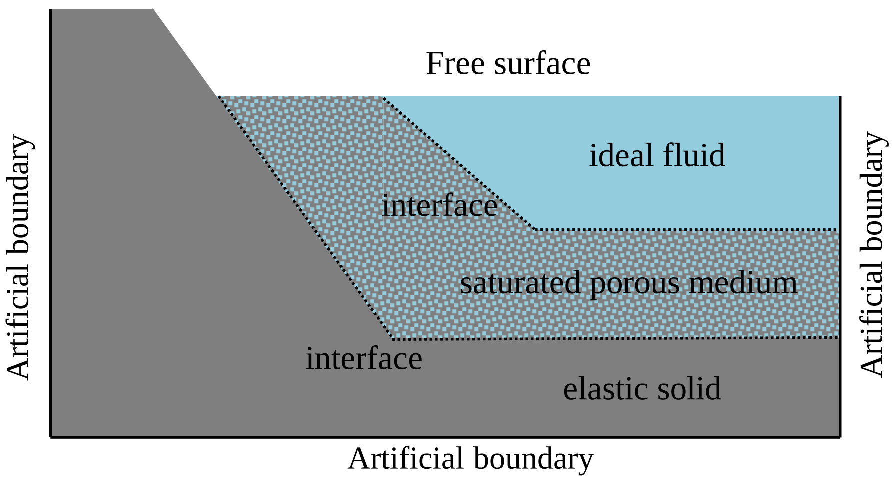
$$L_s^T \sigma' = \rho_s \ddot{u}$$
$$P = 0$$

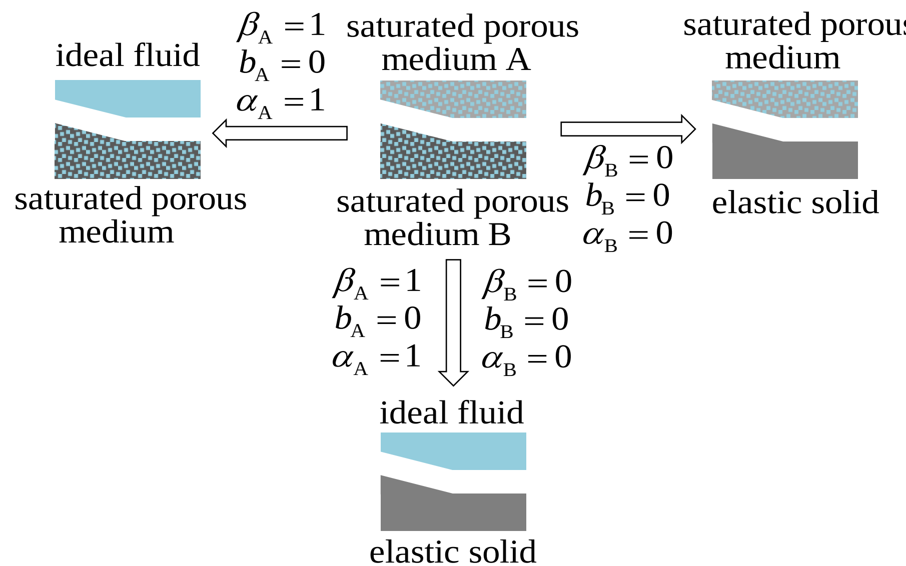
声波方程

Biot 方程

弹性波方程

流固耦合问题统一计算框架





1. 不同的**方程形式**
2. 不同的**场变量**
3. 不同的**空间离散**格式
4. 不同的**时步积分**格式
5. 分界面信息**交互繁琐**

声波方程
Biot方程
弹性波方程

传统方法

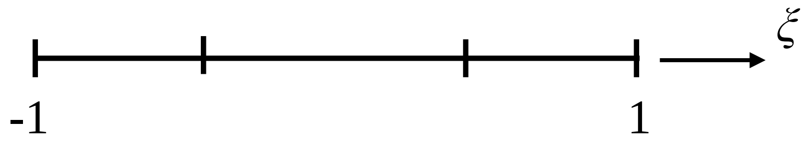
Biot方程

1. **计算格式全部统一**
（各层介质**参数不同**）

2. 内节点和分界面节点
同步显式求解

统一计算框架

传统谱单元质量矩阵



Chebyshev谱单元质量矩阵

$$M_{ij}^e = \rho |\boldsymbol{J}| \frac{4}{(p-1)^2 c_i c_j} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{c_k c_l} T_k(\xi_i) T_l(\xi_j) A_{kl}$$

$$\boldsymbol{M}^e = \begin{bmatrix} 0.1418 & 0.0127 & -0.0720 & 0.0286 \\ 0.0127 & 0.7450 & 0.2032 & -0.0720 \\ -0.0720 & 0.2032 & 0.7450 & 0.0127 \\ 0.0286 & -0.0720 & 0.0127 & 0.1418 \end{bmatrix}$$

Gauss-Legendre(GL)积分结果

Legendre谱单元质量矩阵

$$M_{ij}^e = \rho |\boldsymbol{J}| \sum_{k=1}^{p} w_k N_i(\xi_k) N_j(\xi_k)$$

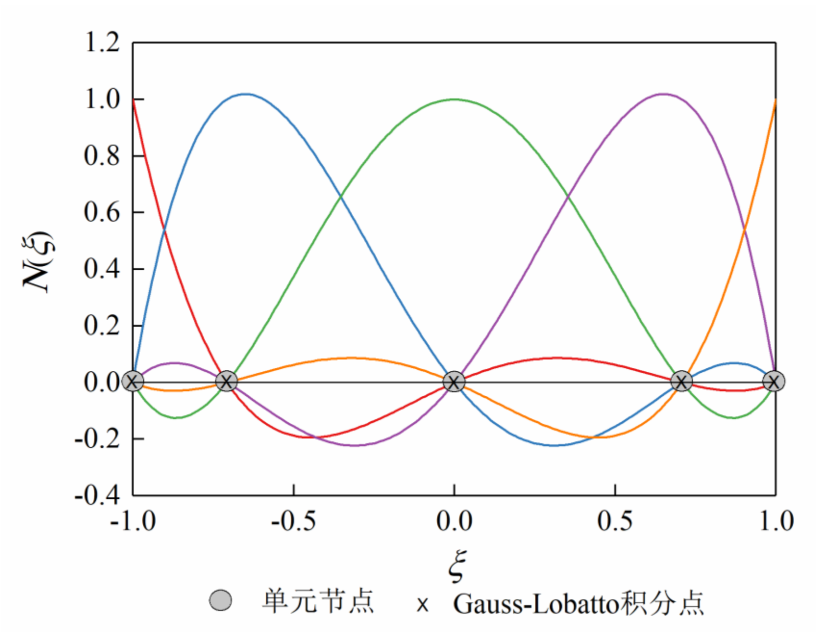
$$\boldsymbol{M}^e = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

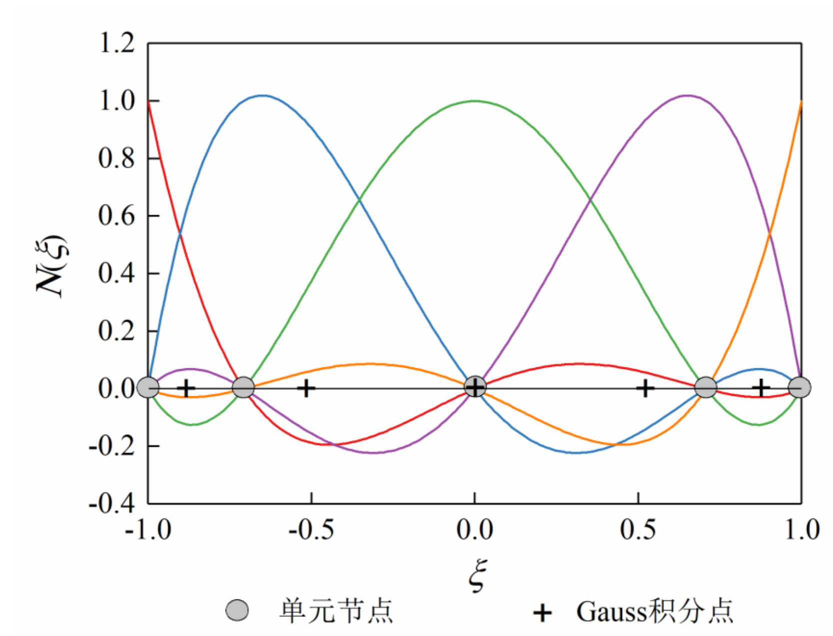
Gauss-Lobatto-Legendre(GLL)积分结果

构建质量矩阵的数学机制

南京工业大学
工程力学研究所

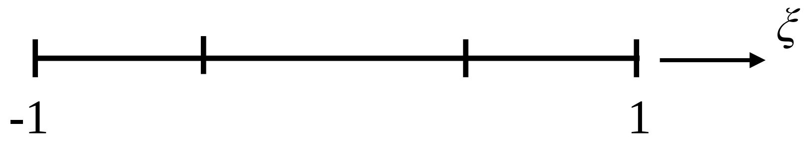
$$\boldsymbol{M}^e = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{N} dx = \sum_{i=0}^{n} w_i \left(\boldsymbol{N}(\xi_i)\right)^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{N}(\xi_i) \det\mathbf{J}(\xi_i)$$





结论：Kronecker-δ性质导致集中质量矩阵。

谱单元质量矩阵



Chebyshev谱单元质量矩阵

$$M_{ij}^{e}=\rho\left|\boldsymbol{J}\right|\frac{4}{\left(p-1\right)^{2}c_{i}c_{j}}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1}\frac{1}{c_{k}c_{l}}T_{k}\left(\xi_{i}\right)T_{l}\left(\xi_{j}\right)A_{kl}$$

$$\boldsymbol{M}^{e}=\begin{bmatrix}0.1111 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.8889 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.8889 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.1111\end{bmatrix}$$

Gauss-Lobatto-Chebyshev(GLC)积分结果

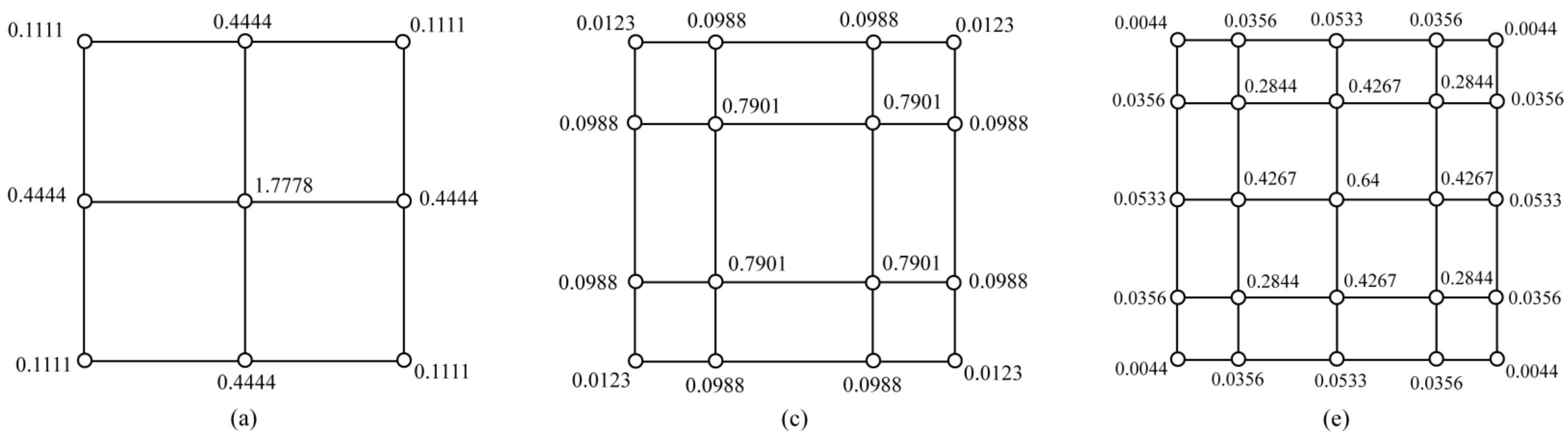
Legendre谱单元质量矩阵

$$M_{ij}^{e}=\rho\left|\boldsymbol{J}\right|\sum_{k=1}^{p}w_{k}N_{i}\left(\xi_{k}\right)N_{j}\left(\xi_{k}\right)$$

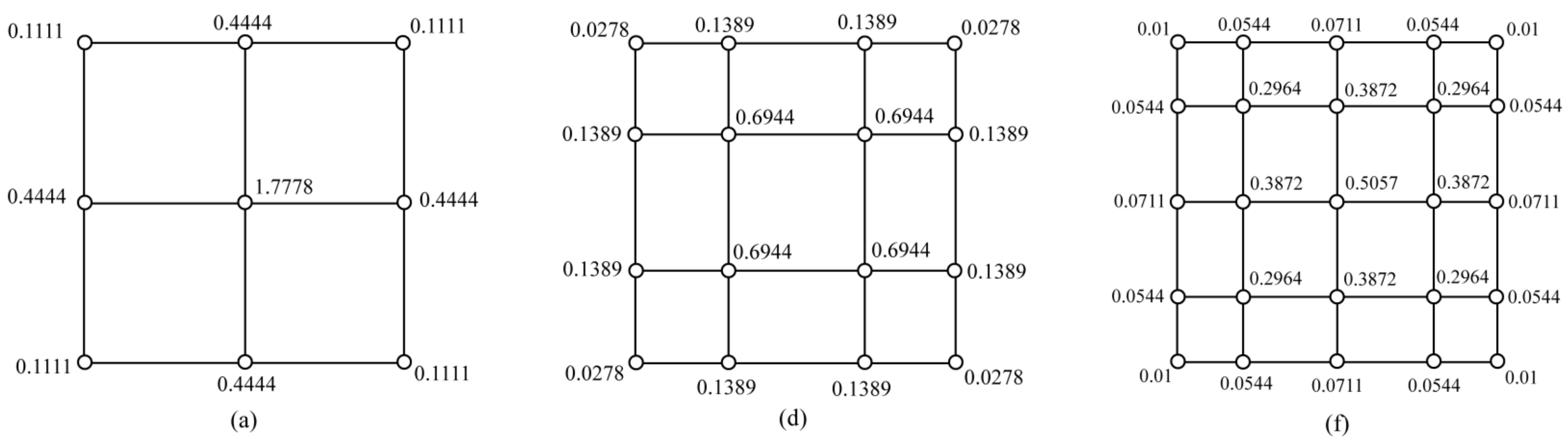
$$\boldsymbol{M}^{e}=\begin{bmatrix}0.1429 & 0.0532 & -0.0532 & 0.0238\\ 0.0532 & 0.7143 & 0.1190 & -0.0532\\ -0.0532 & 0.1190 & 0.7143 & 0.0532\\ 0.0238 & -0.0532 & 0.0532 & 0.1429\end{bmatrix}$$

Gauss-Legendre(GL)积分结果

谱单元集中质量分布特征



Chebyshev谱单元



Legendre谱单元

谱单元集中质量分布特征

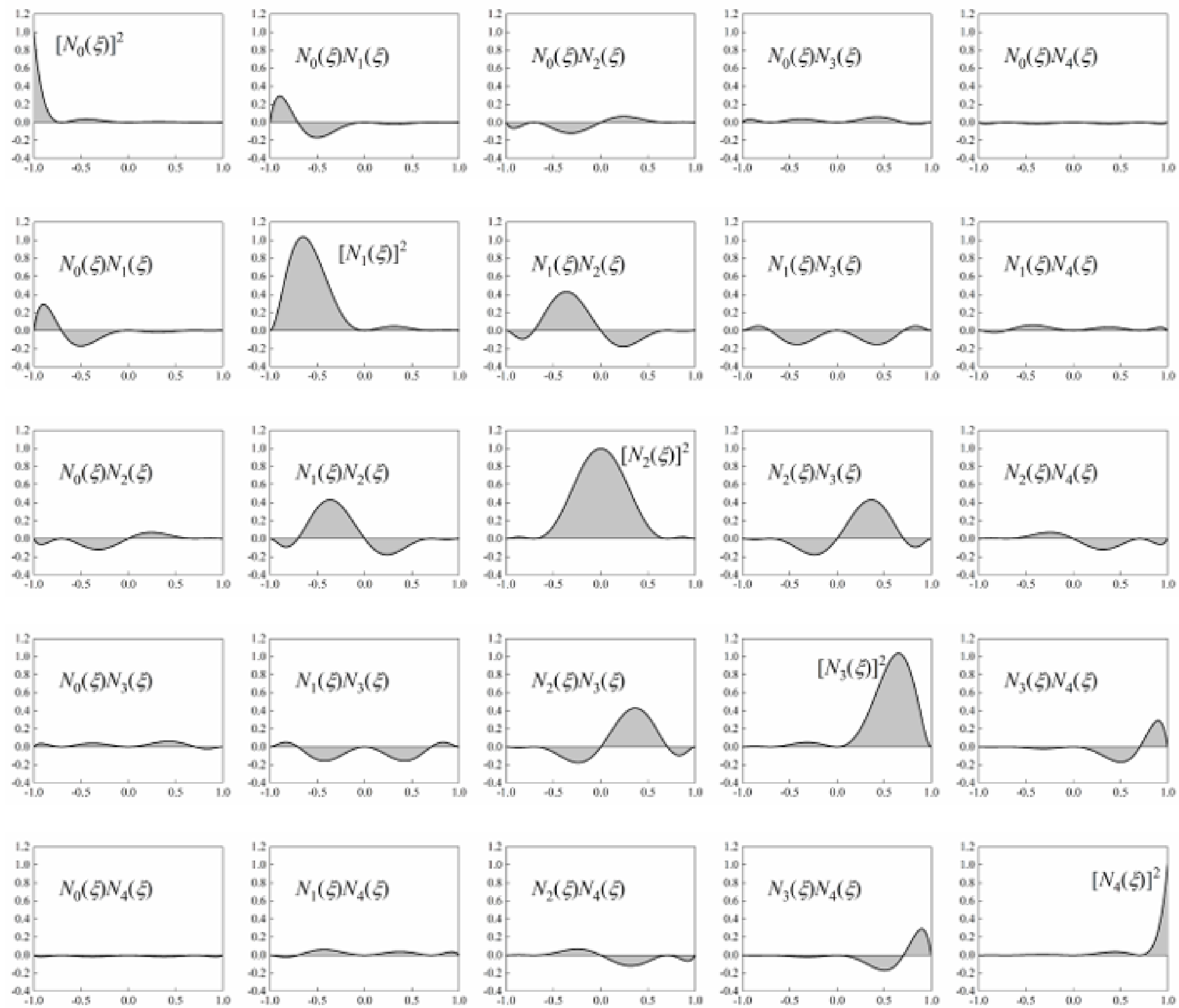


图 4 一维 5 节点 Chebyshev 谱单元一致质量模型数学图示

Fig. 4 Mathematical representation for consistent mass model of 1-D 5-node Chebyshev element

积分方法的影响

南京工业大学
工程力学研究所

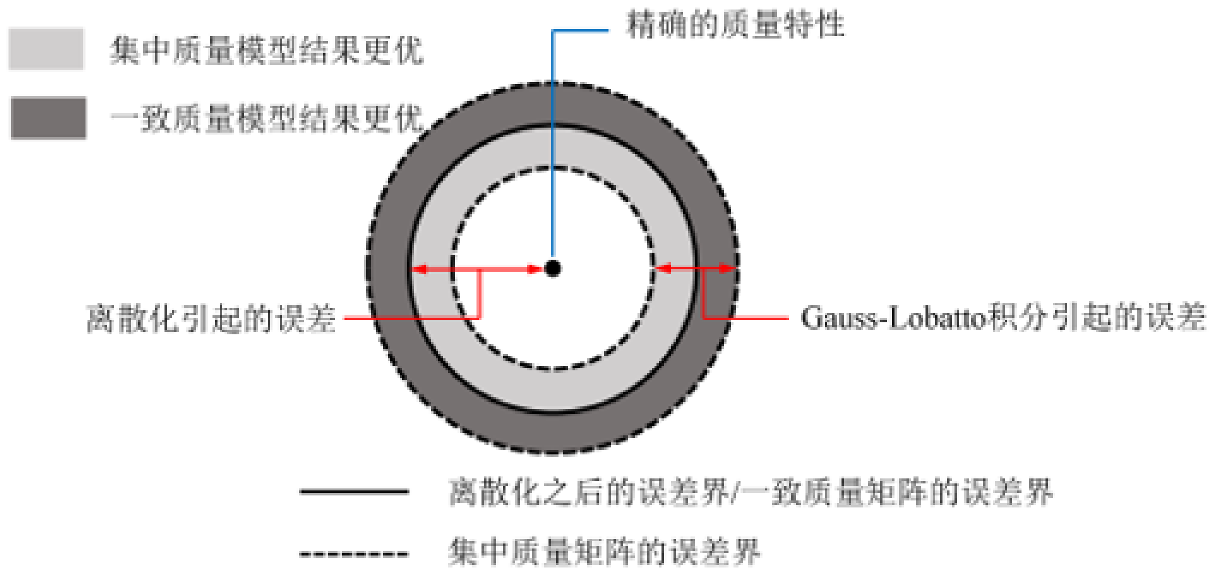


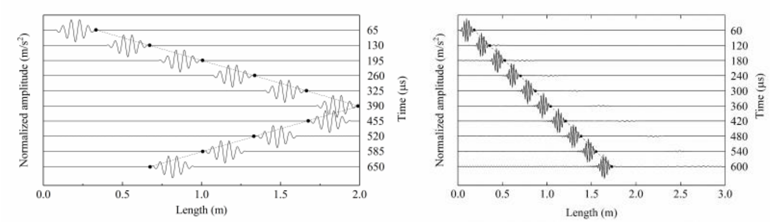
图 9 离散化和积分过程引起的质量特性误差

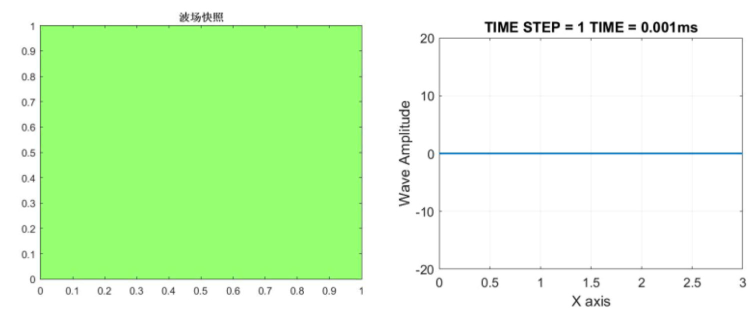
Fig. 9 Error in mass property caused by discretization and integration

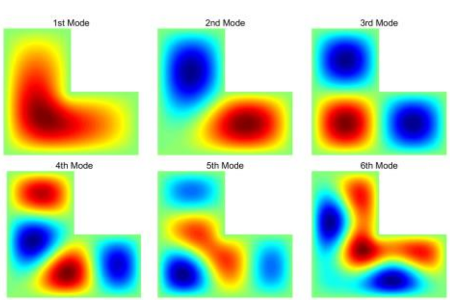
集中质量时域谱单元

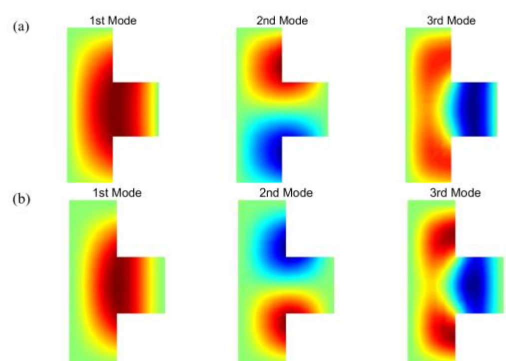
南京工业大学
工程力学研究所

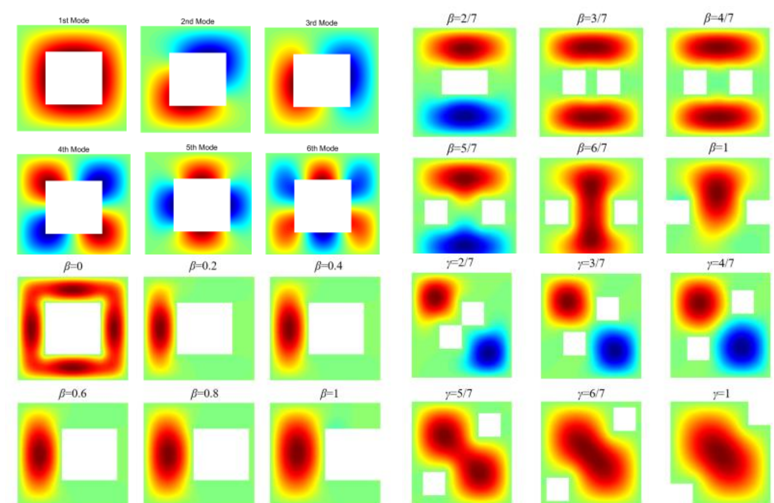
- 拉压杆谱单元
- Timoshenko梁谱单元
- Mindlin板谱单元
- 三维实体谱单元
- C¹型Chebyshev板谱单元



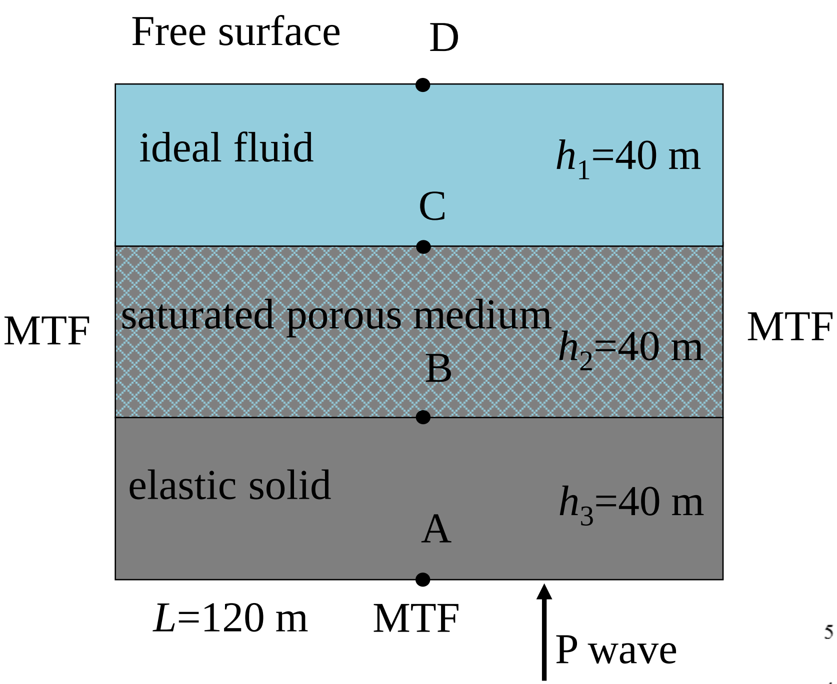


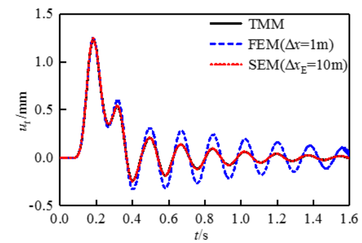




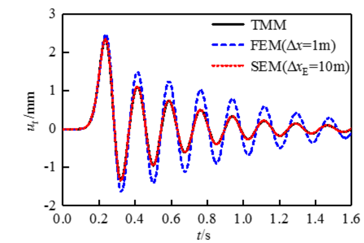


流固耦合地震波动模拟

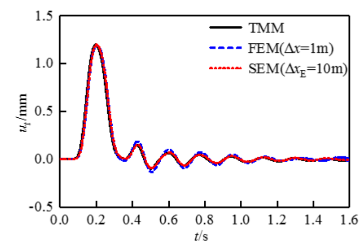




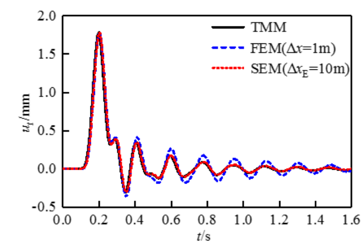
(e) C 点饱和土固相位移



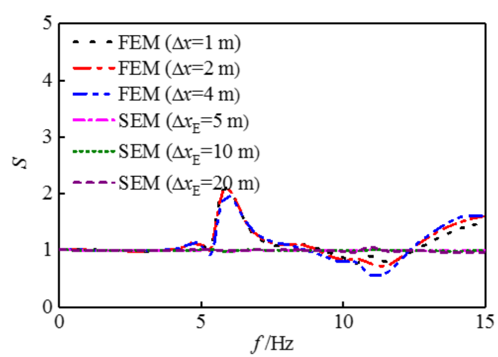
(f) C 点饱和土液相位移



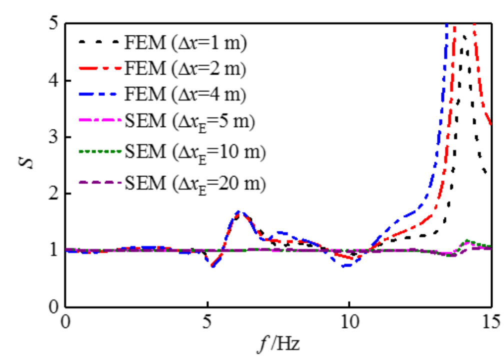
(g) C 点理想流体位移



(h) D 点理想流体位移



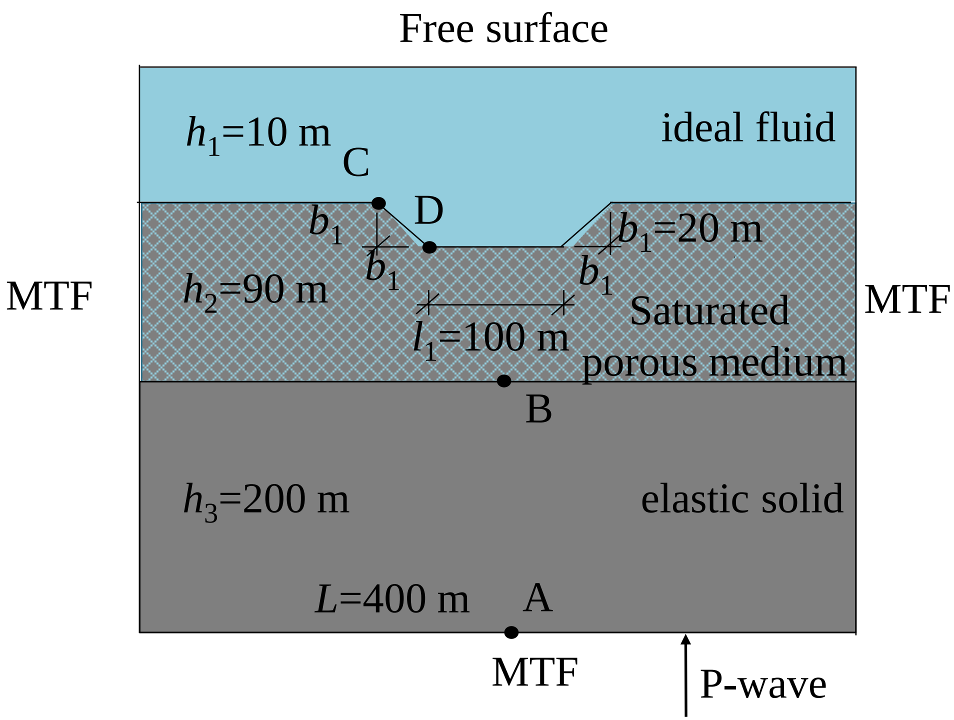
(a) C 点固相位移谱比

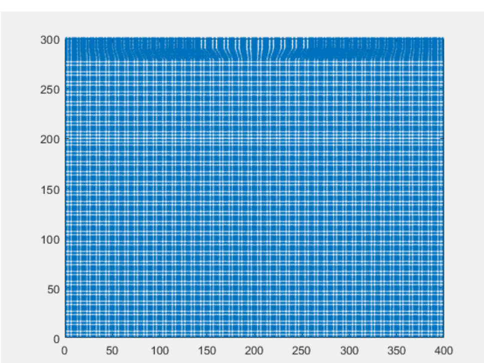


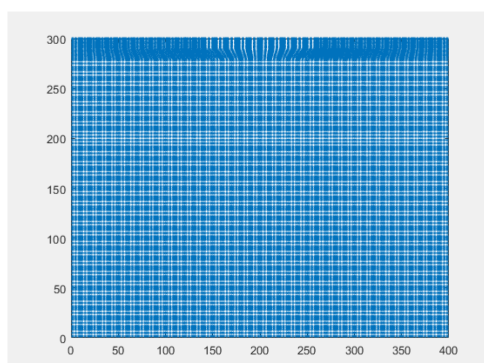
(b) C 点液相位移谱比

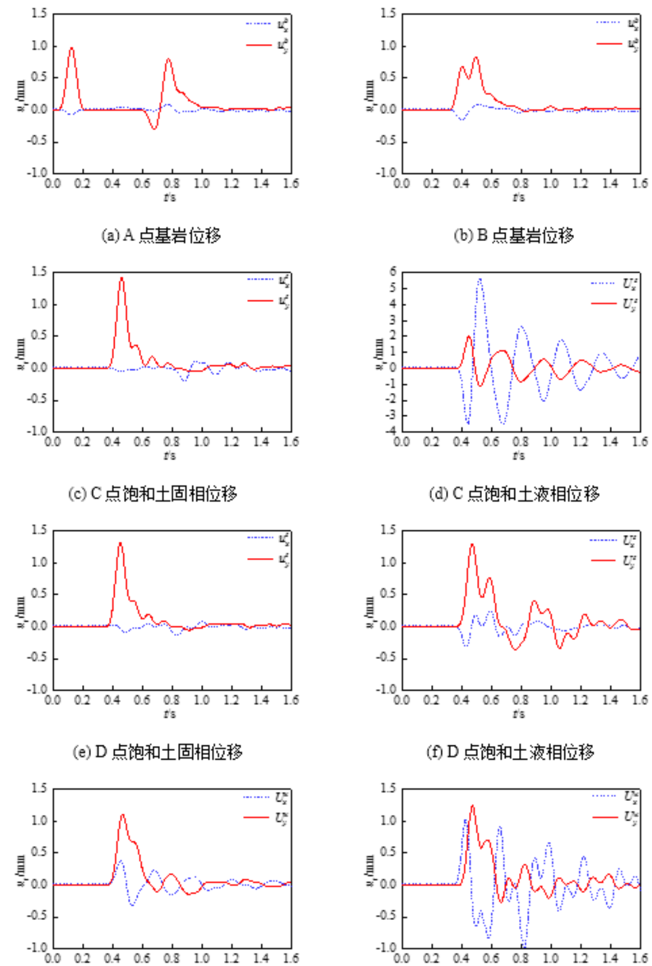
流固耦合地震波动模拟

南京工业大学
工程力学研究所





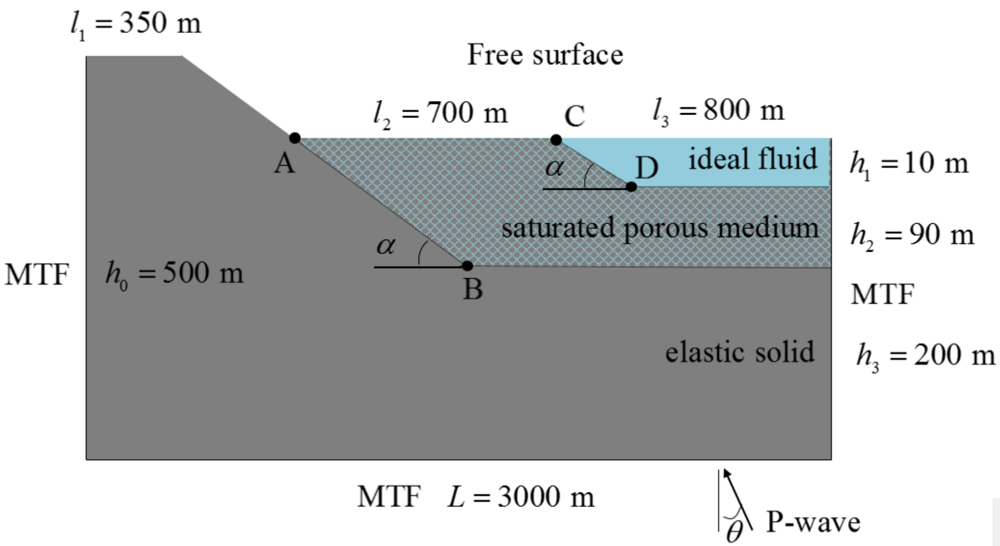


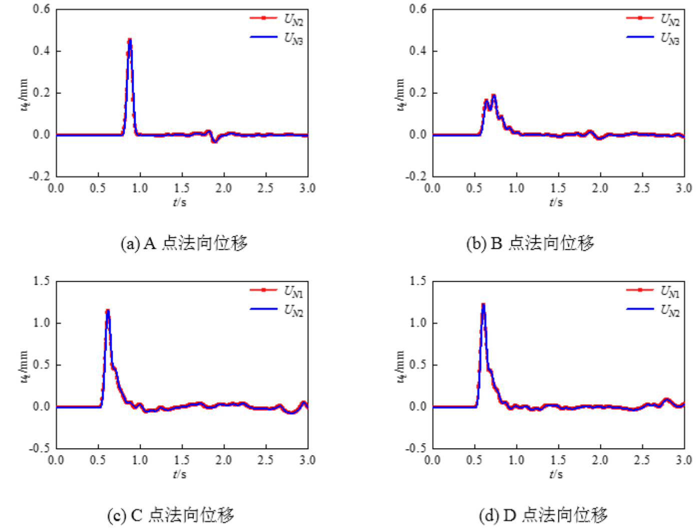


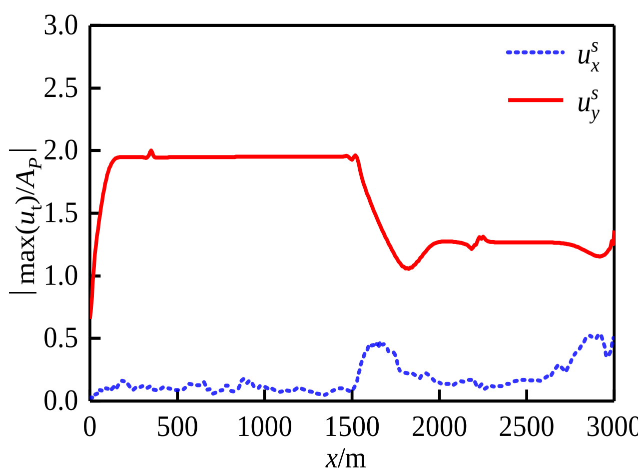
(a) A 点基岩位移
(b) B 点基岩位移
(c) C 点饱和土固相位移
(d) C 点饱和土液相位移
(e) D 点饱和土固相位移
(f) D 点饱和土液相位移
(g) C 点理想流体位移
(h) D 点理想流体位移

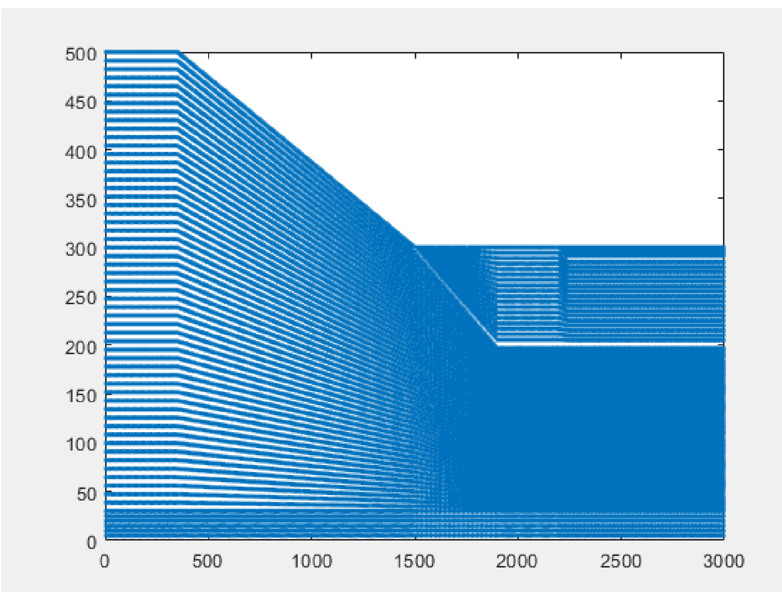
流固耦合地震波动模拟

南京工业大学
工程力学研究所



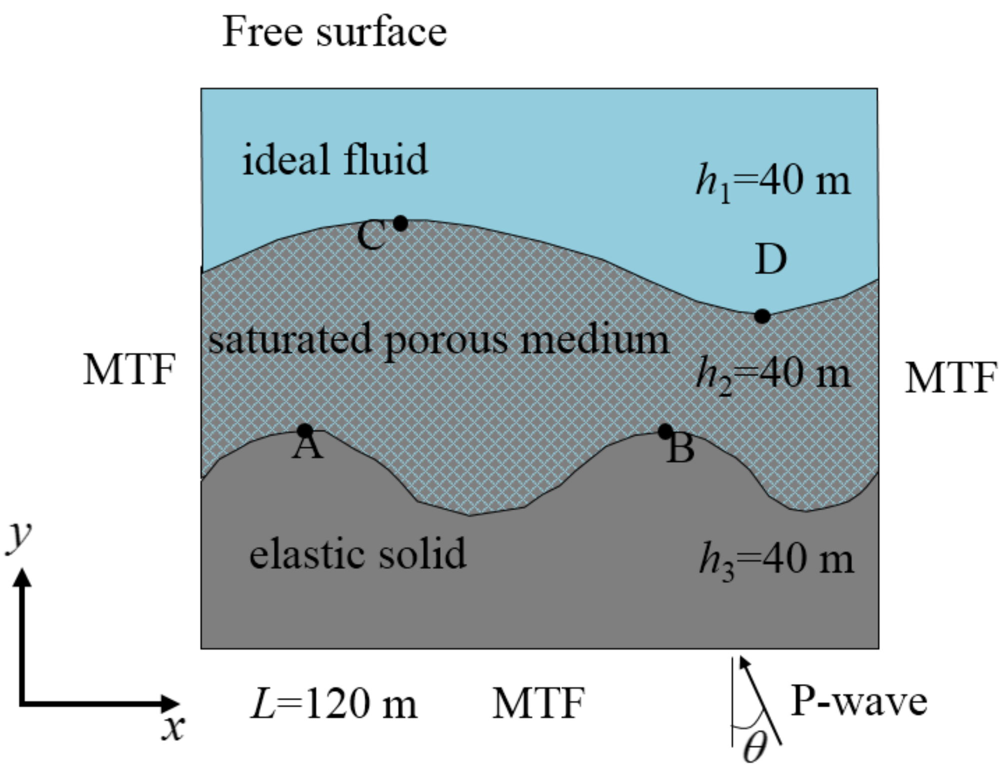


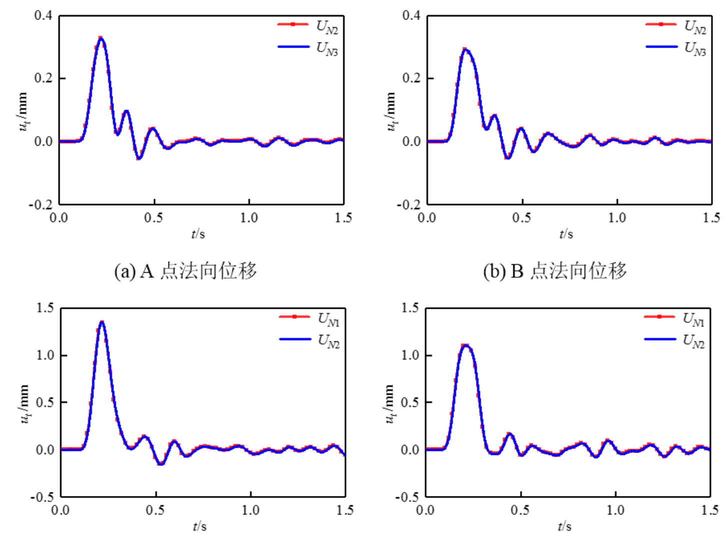




流固耦合地震波动模拟

南京工业大学
工程力学研究所



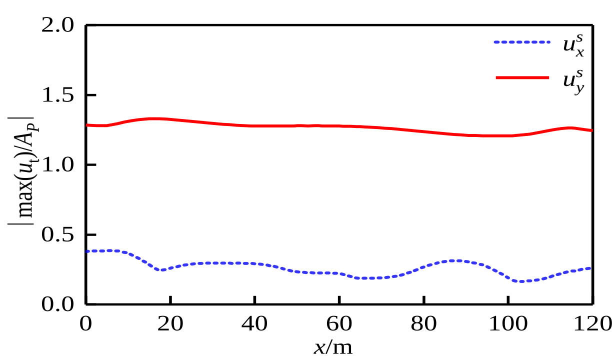


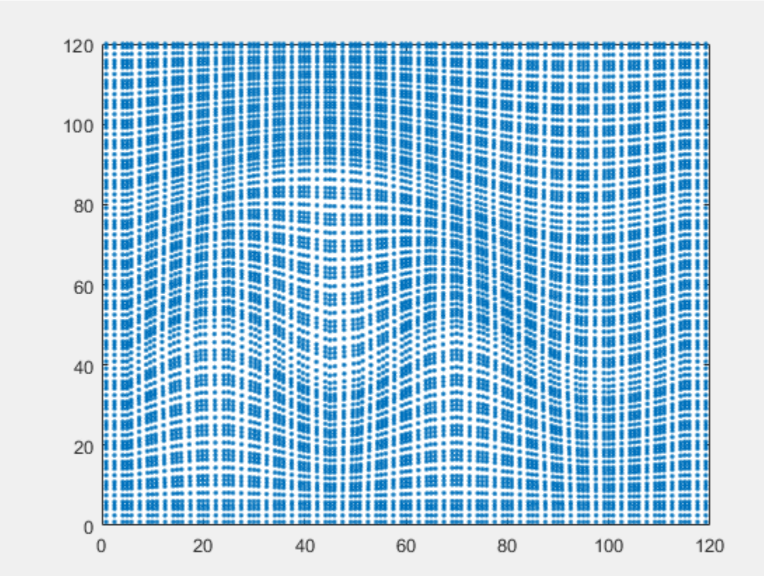
(a) A 点法向位移

(b) B 点法向位移

(c) C 点法向位移

(d) D 点法向位移





南京工業大學
NANJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

目录 | CONTENT

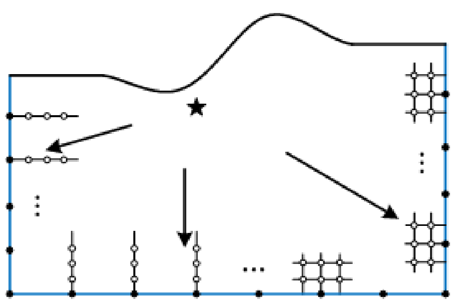
人工边界条件

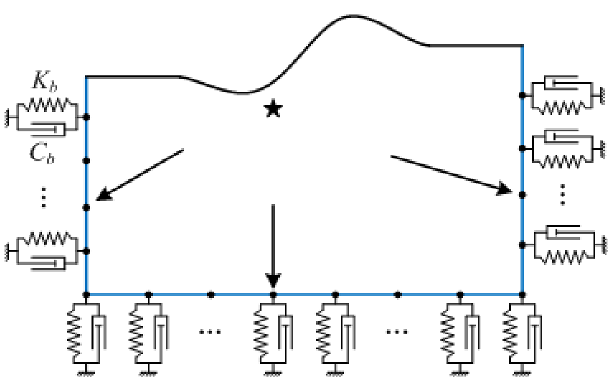
针对问题：当前人工边界条件种类繁多(几十上百种)，如何分类是个难题?

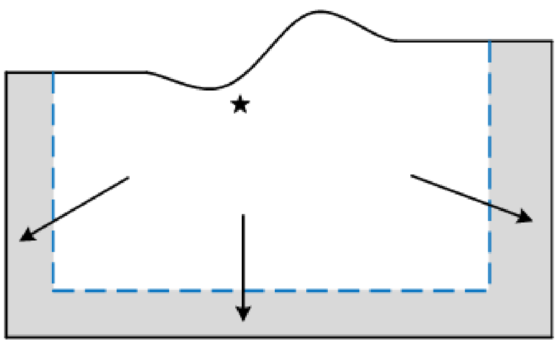
我们认为，计算人工边界节点运动的方式可分为三种类型：

(1) 时空外推　(2) 应力平衡　(3) 区域衰减

据此，将局部人工边界条件分为以下三类：







外推型人工边界条件

[利用内部节点的运动直接外推人工边界节点的运动]

(Clayton-Engquist旁轴近似边界；
廖氏透射边界；
Higdon边界；
AWWE边界等)

应力型人工边界条件

[添加弹簧、阻尼等力学元件来模拟被截掉的外部无限介质的作用]

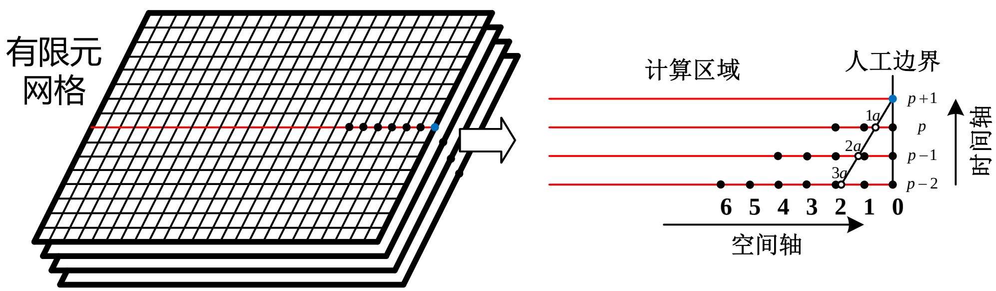
(Lysmer-Kuhlemeyer粘性边界；
集中参数模型；
粘弹性边界(刘晶波;Kellezi等)；
高阶应力型边界(杜修力-赵密))

衰减层型人工边界条件

[在外部衰减层内人为地将外行波衰减至接近零的水平]

(Cerjan函数衰减层边界(海绵边界)；
阻尼衰减层；
瑞利阻尼层；
完美匹配层边界)

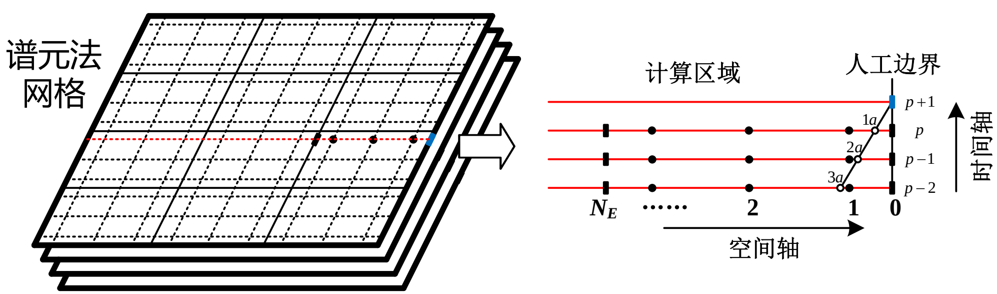
MTF谱元离散格式



有限元网格中的MTF

$$\left[I-\left(t_1+t_2K+t_3K^2\right)Z^{-1}\right]^N u_0^{p+1}=0$$

一阶边界的乘方形式



谱元网格中的MTF

$$u_0^{p+1}=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+1}C_j^N T_j u_j$$

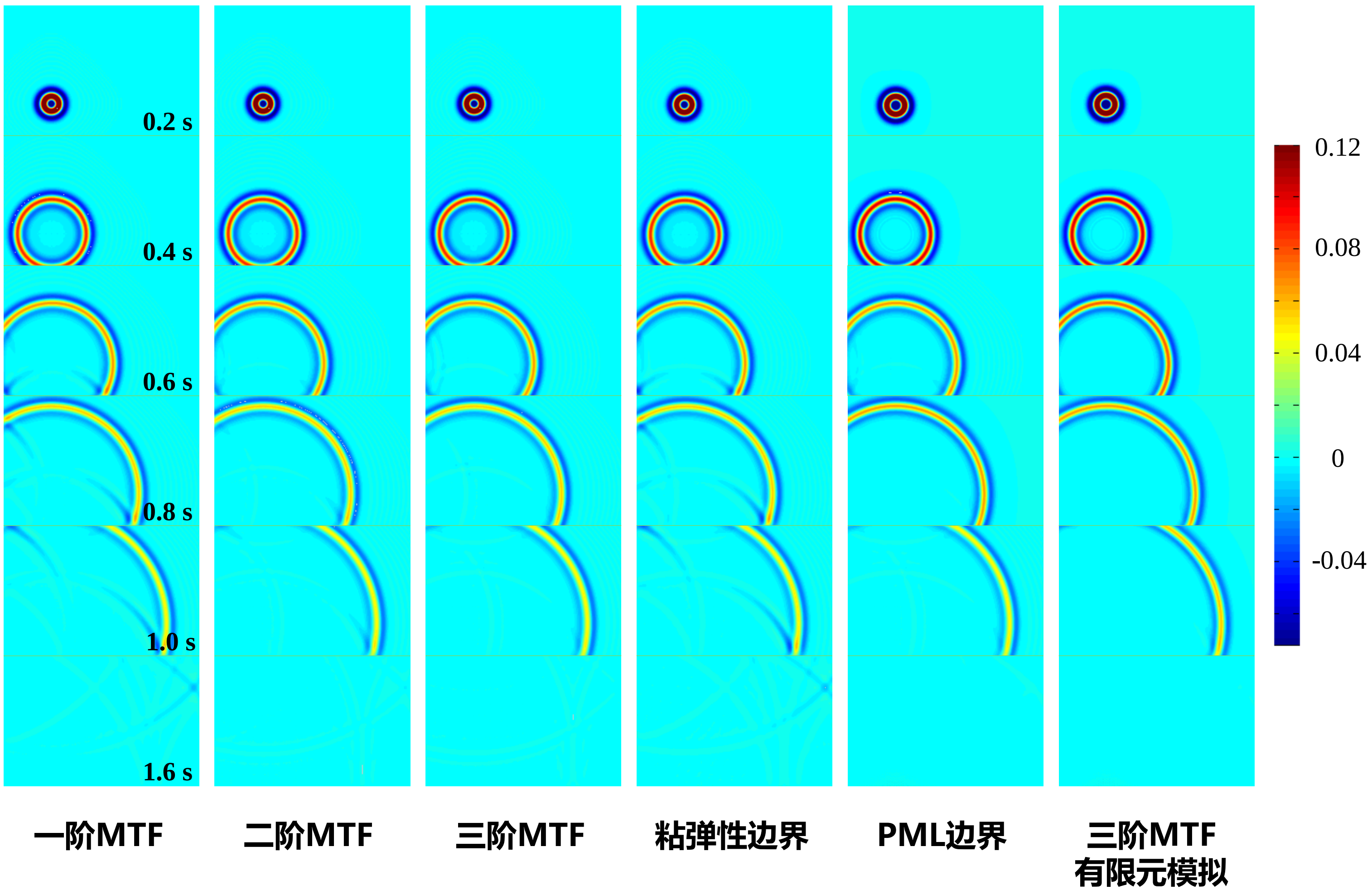
非乘方形式

$$T_j=\left[t_{j,0},t_{j,1},\cdots,t_{j,M}\right]$$

$$u_j=\left[u_0^{p+1-j},u_1^{p+1-j},\cdots,u_M^{p+1-j}\right]^T$$

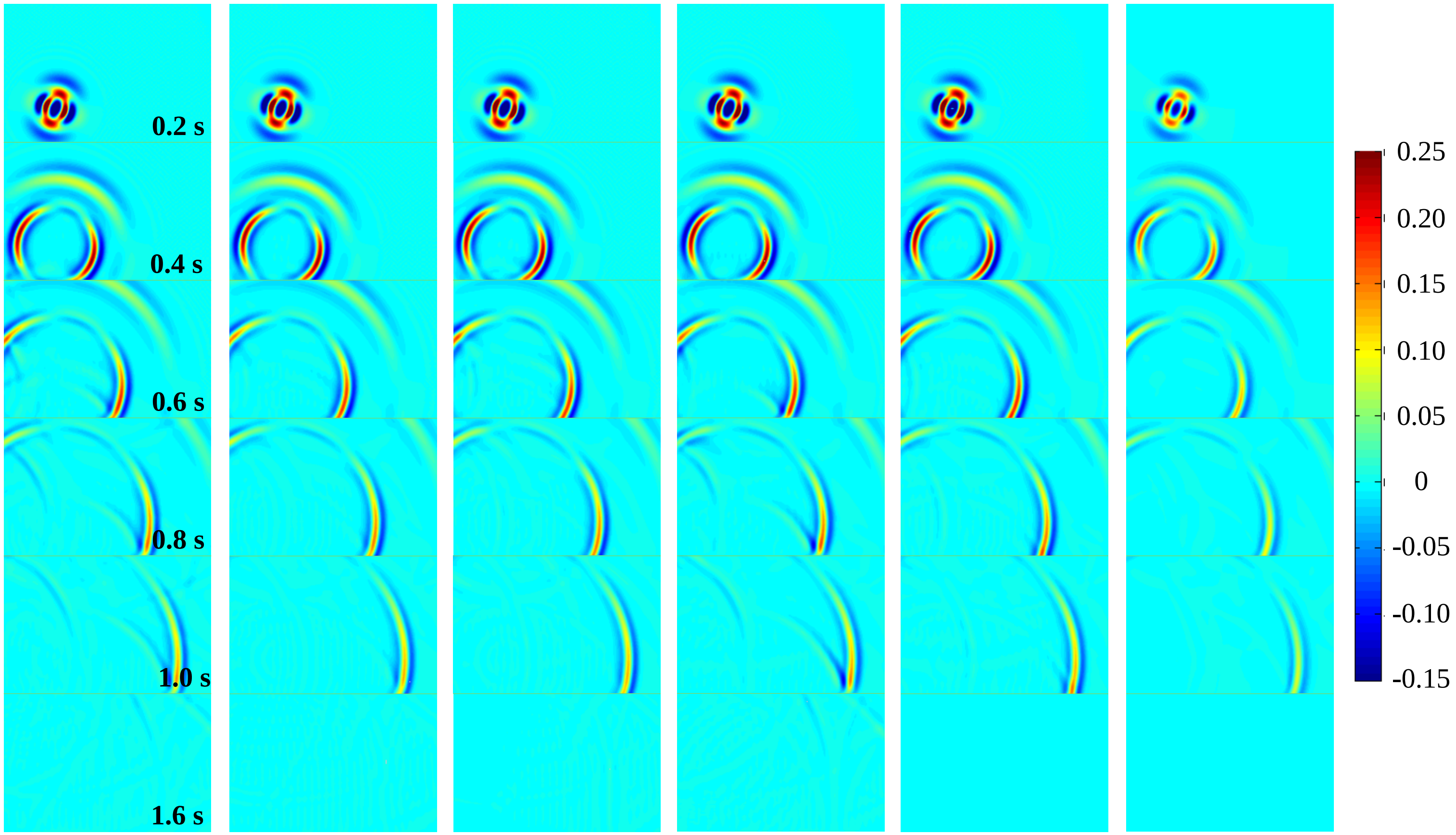
$$t_{j,i}=\prod_{\substack{k=0,\\k\neq i}}^{M}\frac{\left(jc_a\Delta t-s_k\right)}{\left(s_i-s_k\right)}$$

SH波动模拟


0.2 s
0.4 s
0.6 s
0.8 s
1.0 s
1.6 s
0.12
0.08
0.04
0
-0.04
一阶MTF
二阶MTF
三阶MTF
粘弹性边界
PML边界
三阶MTF
有限元模拟

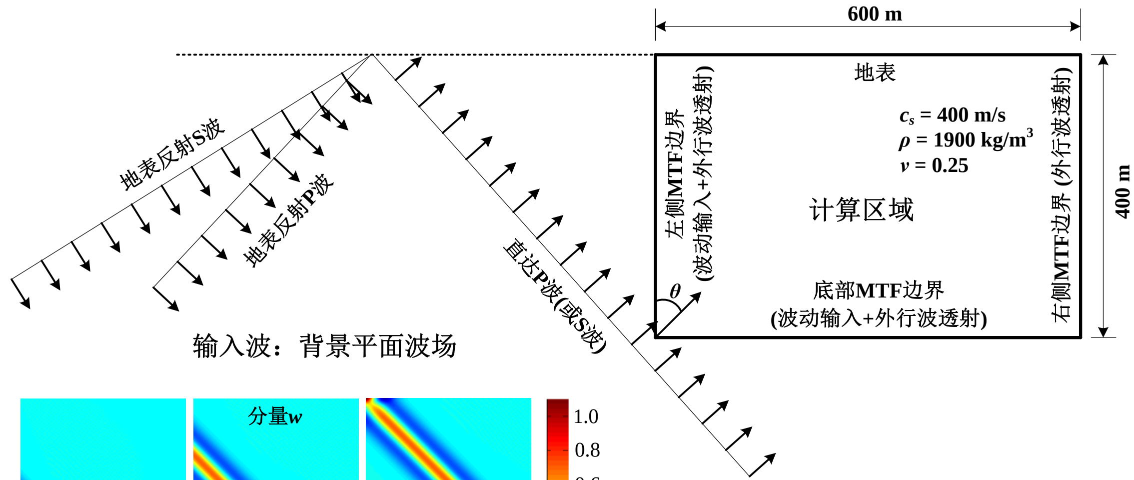
P-SV波动模拟

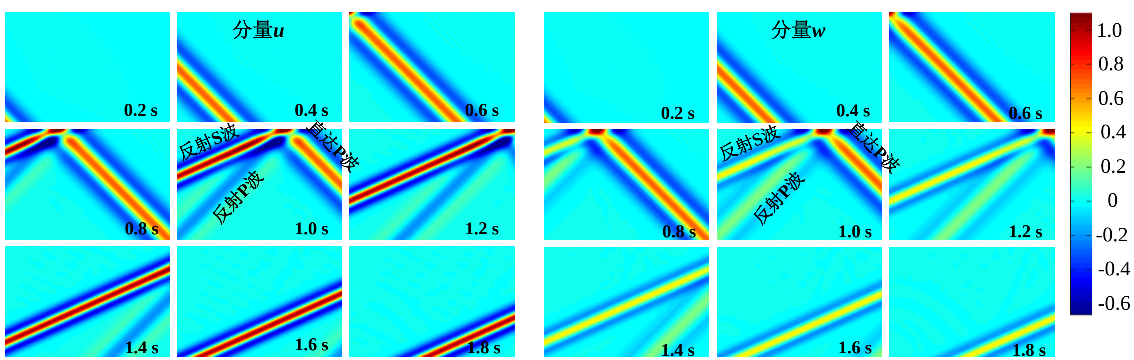
南京工业大学
工程力学研究所



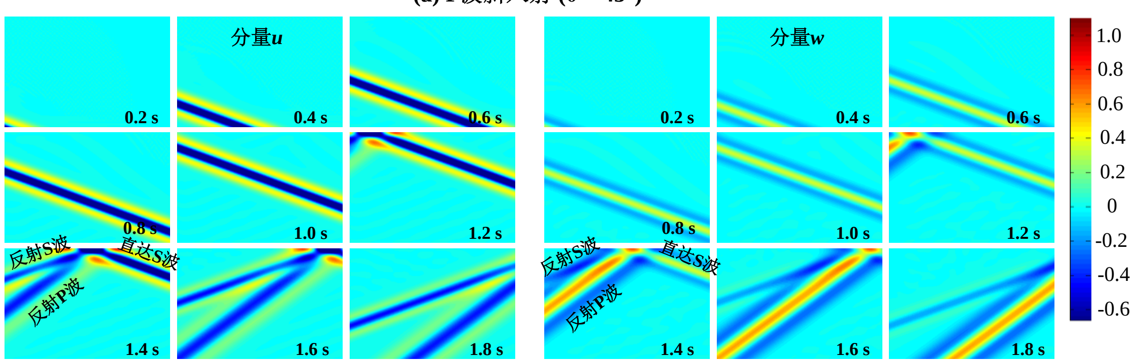
一阶MTF　二阶MTF　三阶MTF　粘弹性边界　PML边界　三阶MTF 有限元模拟

斜入射问题





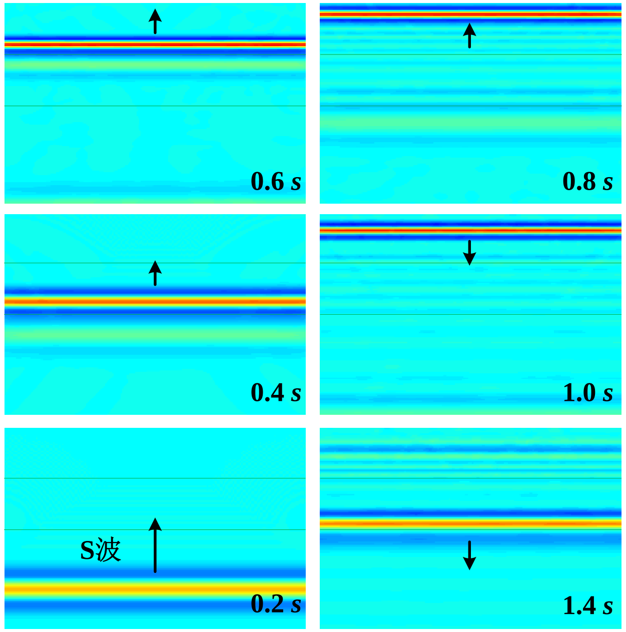
(a) P波斜入射 (θ = 45°)



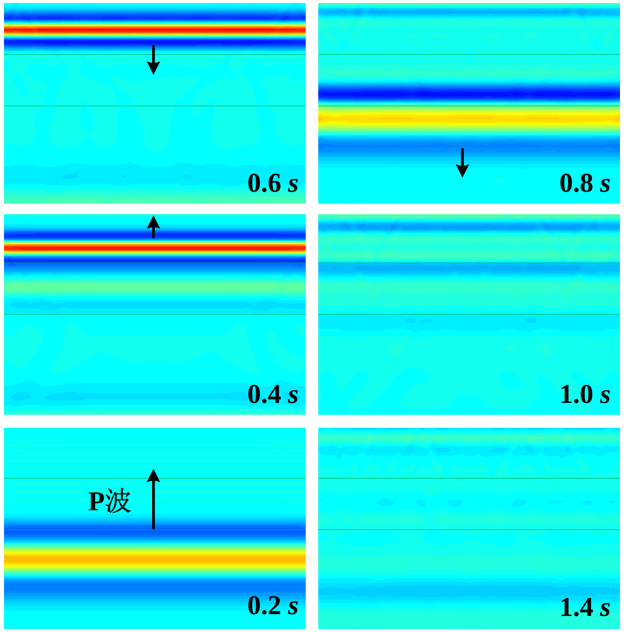
(b) S波斜入射 (θ = 20°)

垂直入射问题

南京工业大学
工程力学研究所



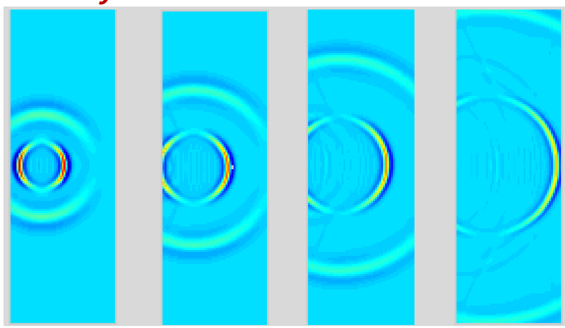
分量u



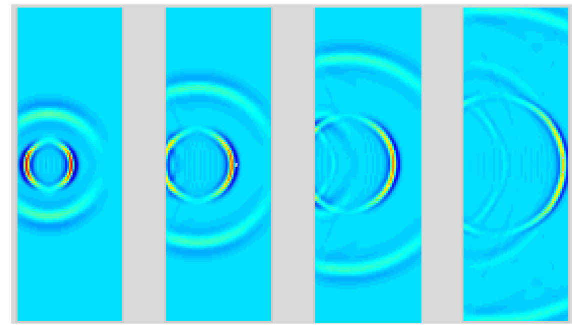
分量w

体波大角度透射

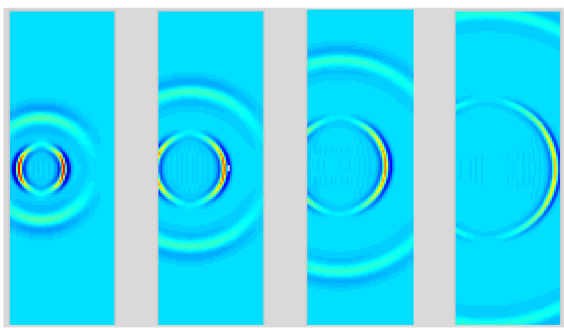
(a) c_{aj}-MTF边界



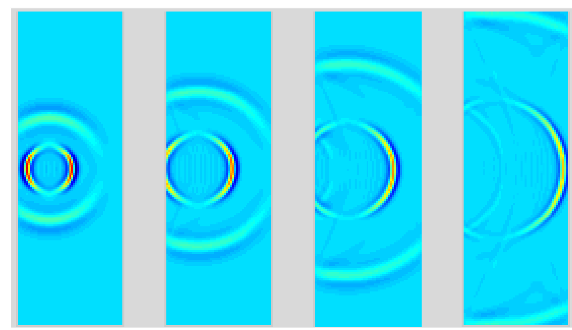
(b) MTF边界



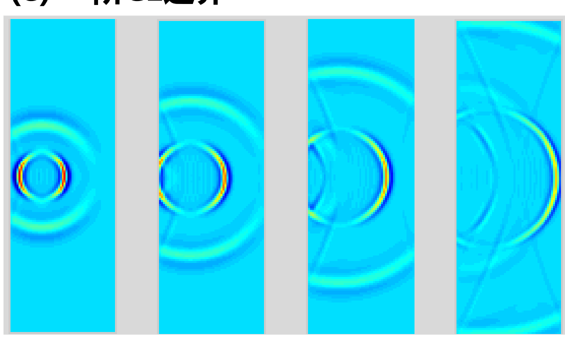
(c) PML边界



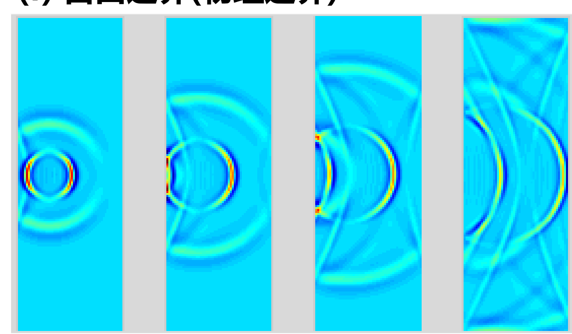
(d) 粘弹性边界



(e) 一阶CE边界



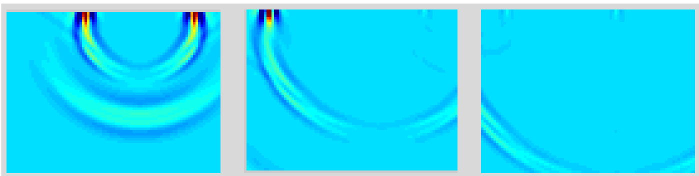
(f) 自由边界(物理边界)



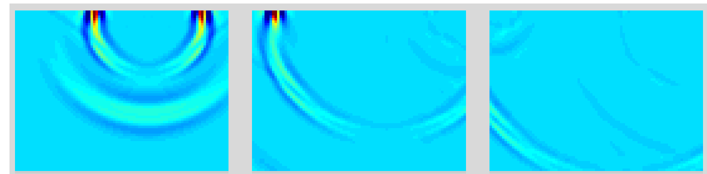
Rayleigh面波透射

南京工业大学
工程力学研究所

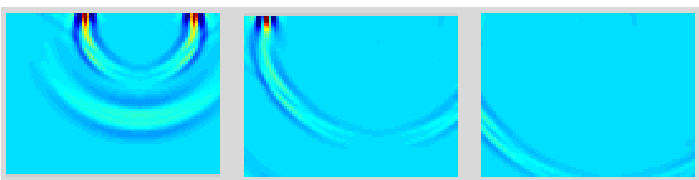
(a) c_{aj}-MTF边界



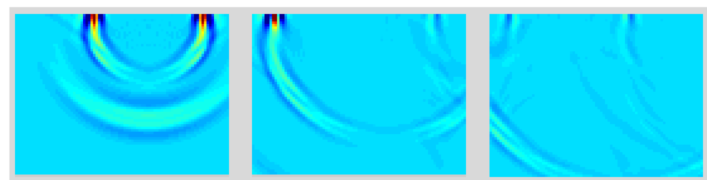
(b) MTF边界



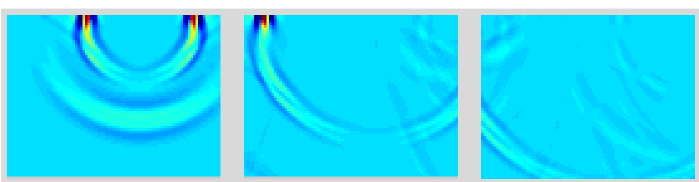
(c) PML边界



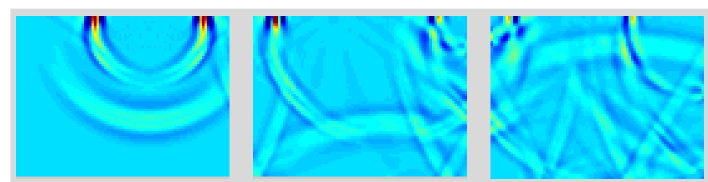
(d) 粘弹性边界



(e) 一阶CE边界



(f) 自由边界(物理边界)



南京工业大学
NANJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

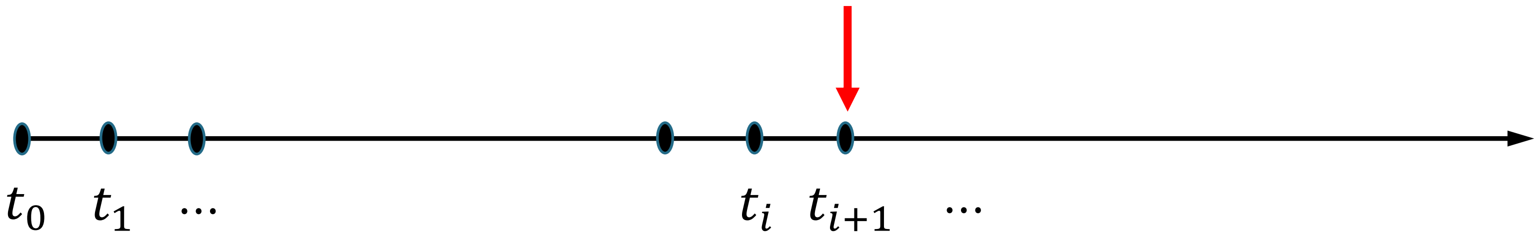
目录 | CONTENT

时间积分传统求解策略

- 单步法
- 多步法

$$\begin{Bmatrix} u_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{Bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \end{Bmatrix} + \boldsymbol{L} r_{t+\Delta t}$$

递推计算：利用前一个时步或前若干个时步的解推测当前时步的解。



高阶时步群算法

状态控制方程：

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{k} & -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m}^{-1} \end{Bmatrix} \boldsymbol{r}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{r}}$$

状态向量： $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{Bmatrix}$　　**初始条件：** $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_0 \\ \dot{\boldsymbol{u}}_0 \end{Bmatrix}$

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = e^{\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{H}(t-\theta)}\boldsymbol{G}\boldsymbol{r}(\theta)d\theta}$$

高阶时步群算法

解析解：

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{y_0} + \int_0^t e^{\boldsymbol{H}(t-\boldsymbol{\theta})}\,\boldsymbol{Gr}(\theta)d\theta$$

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{\boldsymbol{H}t}\left(\boldsymbol{y_0} + \int_0^t e^{-\boldsymbol{H}\theta}\,\boldsymbol{Gr}(\theta)d\theta\right)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{T}(t)[\boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{D}(t)]$$

$$\boldsymbol{T}(t) = e^{\boldsymbol{H}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}t + \frac{(\boldsymbol{H}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{H}t)^3}{3!} + \frac{(\boldsymbol{H}t)^4}{4!} + \cdots$$

$$\boldsymbol{D}(t) = \int_0^t \boldsymbol{T}(-\theta)\boldsymbol{Gr}(\theta)d\theta$$

高阶时步群算法

矩阵指数计算：

$$\boldsymbol{T}(t)=e^{\boldsymbol{H}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}t+\frac{(\boldsymbol{H}t)^2}{2!}+\frac{(\boldsymbol{H}t)^3}{3!}+\frac{(\boldsymbol{H}t)^4}{4!}+\cdots$$

数值方法：精细积分法+秦九韶算法。

积分向量计算：

$$\boldsymbol{D}(t)=\int_0^t \boldsymbol{T}(-\theta)\boldsymbol{G}\boldsymbol{r}(\theta)d\theta$$

$$\dot{\boldsymbol{D}}(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{D}(t)=\boldsymbol{T}(-t)\boldsymbol{G}\boldsymbol{r}(t)$$

高阶时步群算法

南京工业大学
工程力学研究所

稳定性分析：

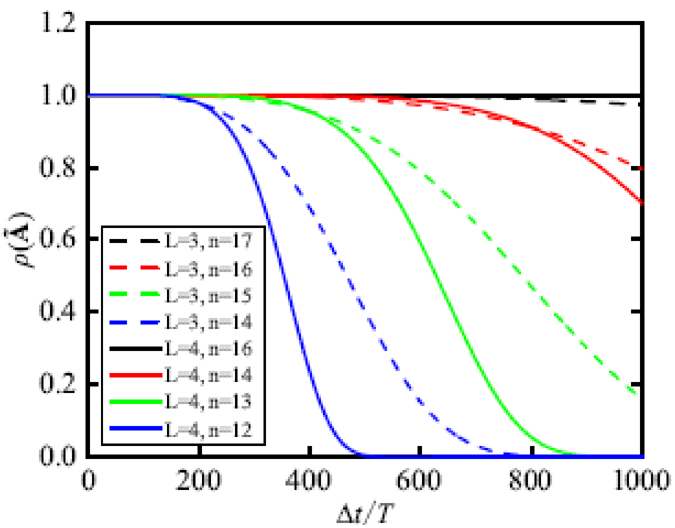


FIGURE 2 Spectral radii vs $\Delta t/T$ for the time-step group method when $\xi = 0$.

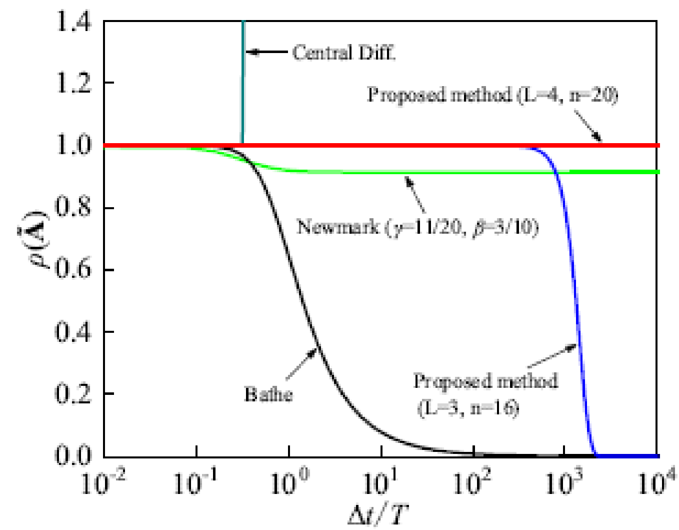
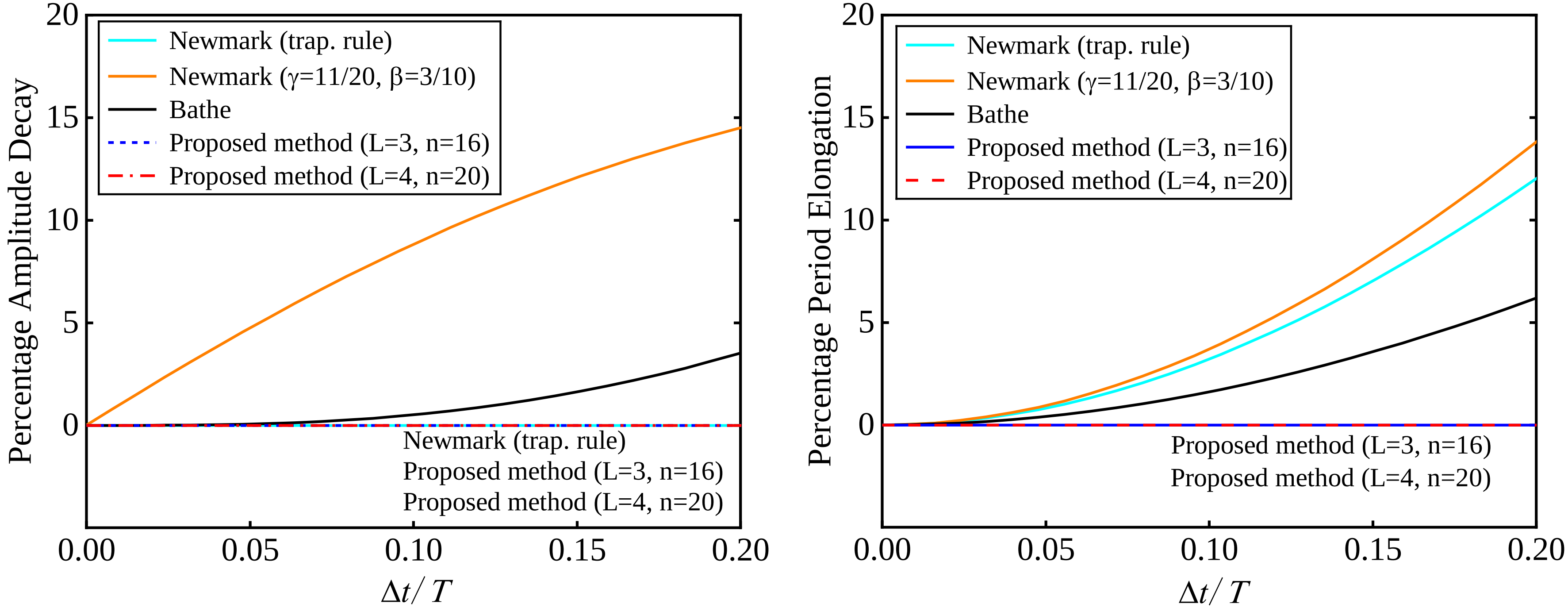


FIGURE 3 Spectral radii vs $\Delta t/T$ for various time integration schemes when $\xi = 0$.

高阶时步群算法

南京工业大学
工程力学研究所

精度分析：



线弹性单自由度算例

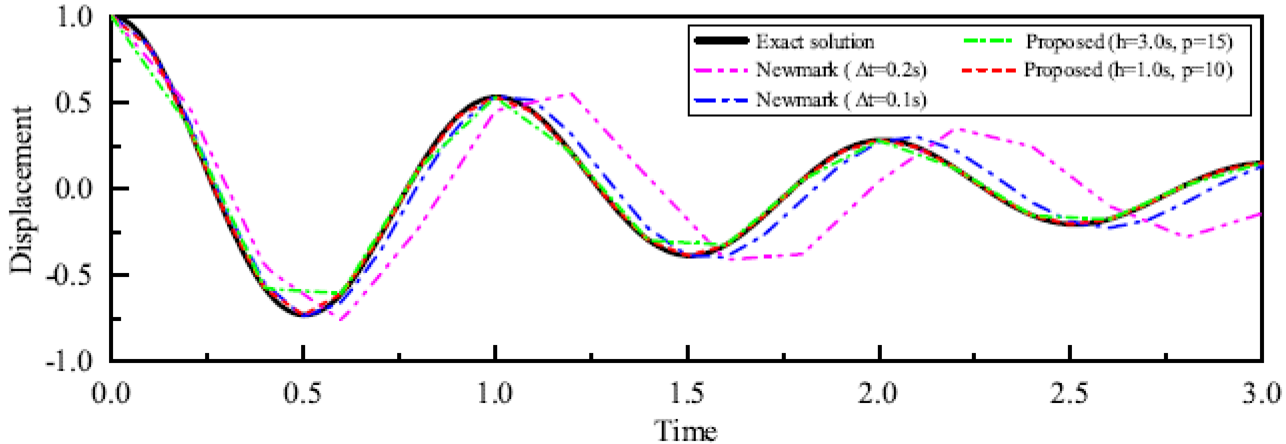


FIGURE 7 Comparison of displacement solutions of linear SDOF system with different time step size.

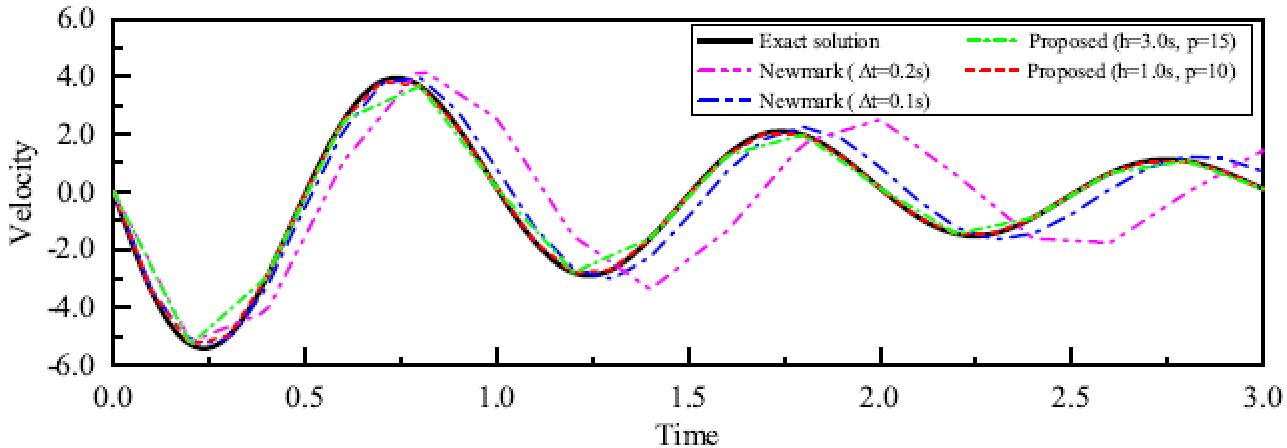


FIGURE 8 Comparison of velocity solutions of linear SDOF system with different time step size.

非线性算例

Duffing oscillator:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + g(t) = f(t)$$

$$g(u) = k_0(1 + \lambda^2 u^2)$$

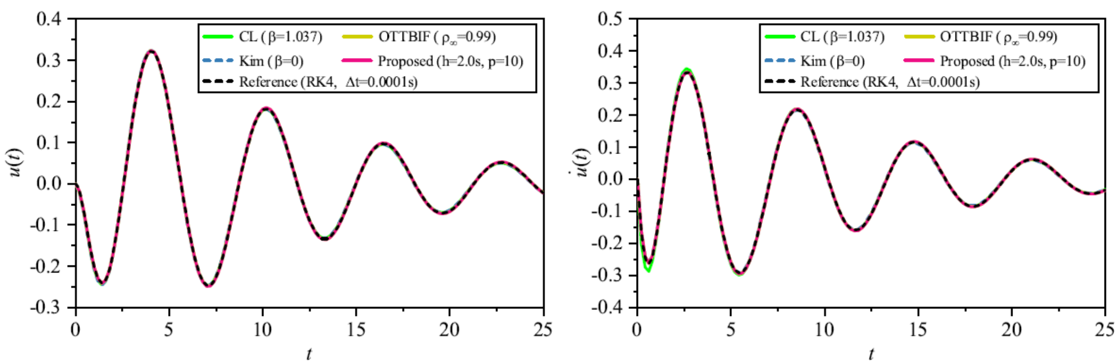


FIGURE 9 Displacements and velocities for the Duffing oscillator with $\Delta t = 0.2$s for all methods.

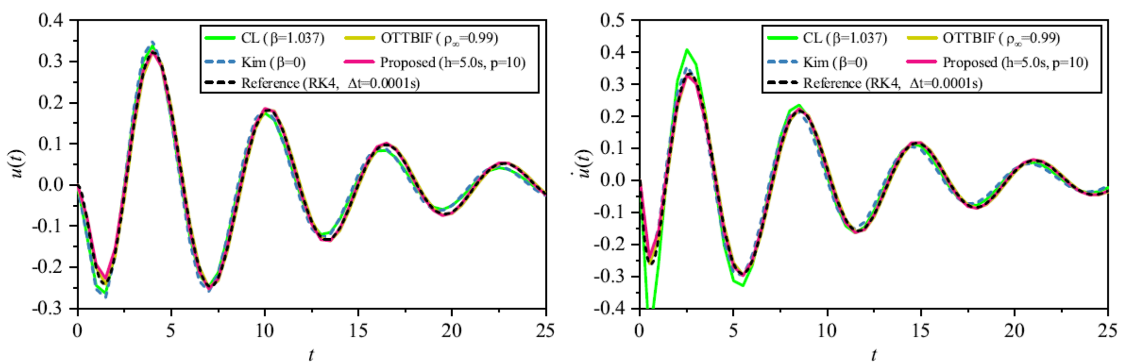


FIGURE 10 Displacements and velocities for the Duffing oscillator with $\Delta t = 0.5$s for all methods.

质量-弹簧系统算例

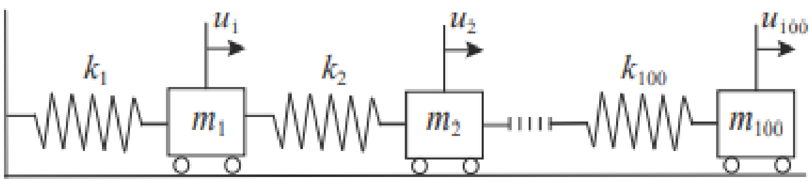


图 4　100 自由度弹簧质量体系

表 5　弹簧-质量体系的基本特性

Table 5　Properties of the spring-mass system

DOF	k/(N/m)	m/(N·s^2/m)	ζ
1~50	3.0×10^7	100.0	0
50~100	1.0×10^5	100.0	0

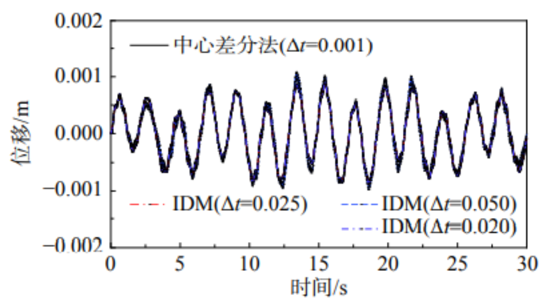


图 6　体系第 50 自由度位移响应对比

Fig. 6　Comparison of the displacement responses of the DOF 50 in this system

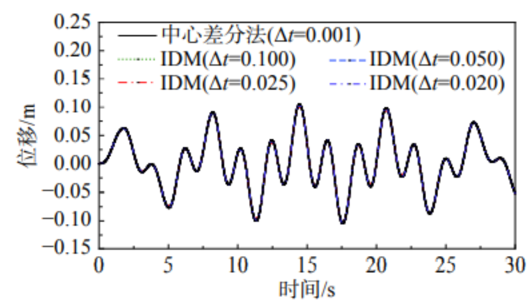


图 5　体系第 100 自由度位移响应对比

Fig. 5　Comparison of the displacement responses of the DOF 100 in this system

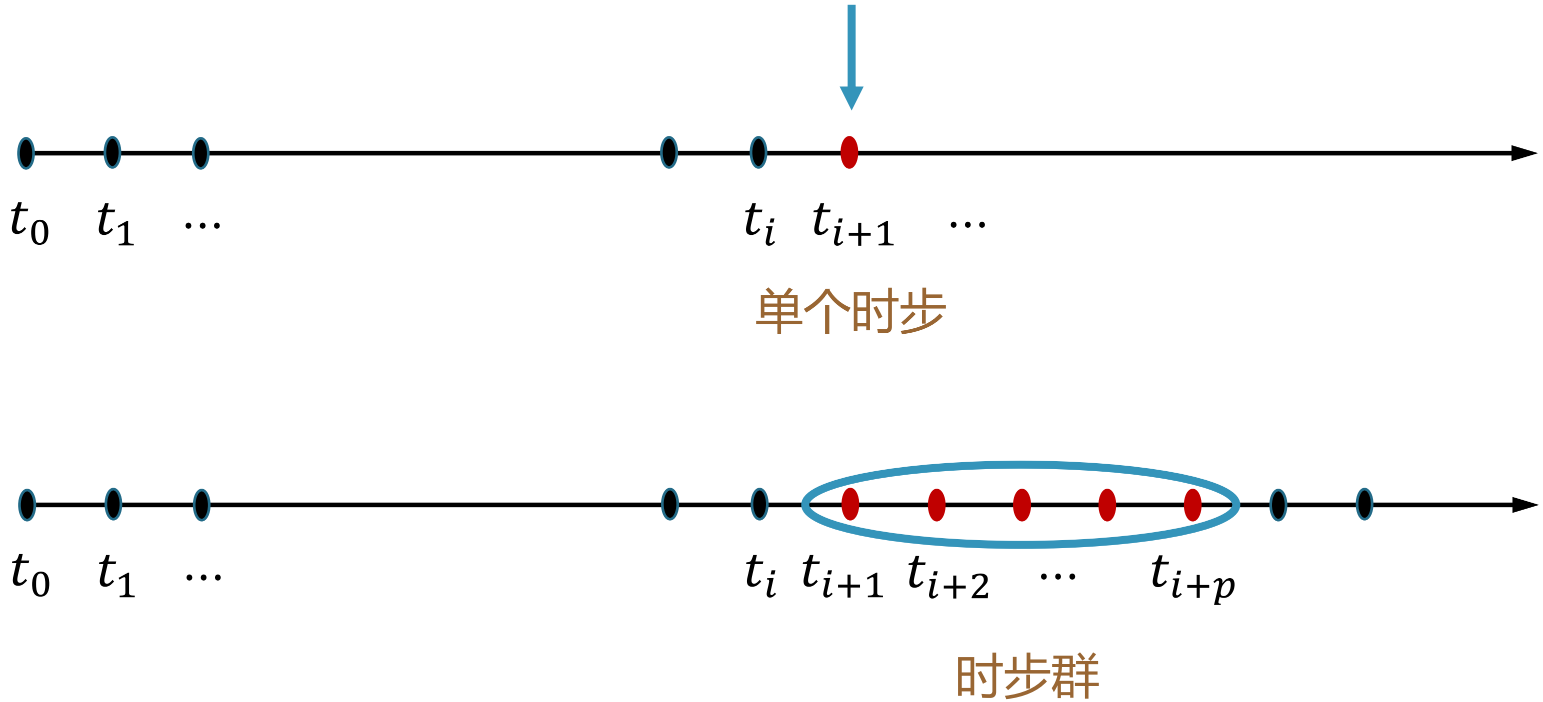
表 6　不同方法 CPU 时间对比

Table 6　Comparison of CPU time with different methods

$CPU^{(IDM,\Delta t=0.05s)}$/s	$CPU^{(IDM,\Delta t=0.025s)}$/s	$CPU^{(IDM,\Delta t=0.02s)}$/s	$CPU^{(CDM,\Delta t=0.001s)}$/s	$\frac{CPU^{(IDM,\Delta t=0.05s)}}{CPU^{(CDM,\Delta t=0.001s)}}$	$\frac{CPU^{(IDM,\Delta t=0.025s)}}{CPU^{(CDM,\Delta t=0.001s)}}$
5.53	9.92	12.33	14.01	0.395	0.708

时步群算法总结

- 动力响应分析表现为矩阵乘法运算，且一次计算同时获得p个时点的解答。



报告人：李鸿晶

邮箱：hjing@njtech.edu.cn

单位：南京工业大学 工程力学研究所

谢谢！ 敬请批评指正！

Thank You